
TD 8 : Equations paraboliques

Exercice 1 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger et équation de la chaleur en dimension 1).

1. Soit $u \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction T-périodique. Montrer que si u est de moyenne nulle, alors
$$\left(\int_0^T |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leq \frac{T}{2\pi}\left(\int_0^T |u'(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$
2. Soit $u = u(t,x)$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, 2π-périodique en x et solution de l'équation de la chaleur
$$\partial_t u - \partial_x(\gamma(x)\partial_x u) = 0,$$
où γ est une fonction de classe C^∞, 2π-périodique et minorée par une constante strictement positive. Montrer que si $u(0,\cdot)$ est de moyenne nulle, alors il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout temps $t \geq 0$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2 \,\mathrm{d}x \leq e^{-ct}\int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 (Théorie spectrale).
Considérons $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné.

1. Démontrer l'existence d'un opérateur borné $T \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$ vérifiant
$$\forall f \in L^2(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Tf, v\rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$
2. Soit $\iota : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ l'injection canonique. Vérifier que l'opérateur $T \circ \iota : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ est positif, autoadjoint, injectif et compact.
3. En déduire que le spectre du laplacien de Dirichlet $-\Delta$ sur Ω est une suite strictement croissante $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels strictement positifs qui diverge à l'infini. En déduire également l'existence d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$ de $H_0^1(\Omega)$ telle que $-\Delta e_n = \lambda_n e_n$ pour tout $n \geq 0$.
4. Calculer explicitement ces valeurs propres et ces fonctions propres lorsque $d = 1$ et $\Omega = (0,1)$.

Exercice 3 (Domaine borné).
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $T > 0$ un temps final, $u_0 \in L^2(\Omega)$ une donnée initiale et $f \in L^2((0,T) \times \Omega)$ un terme source. On veut démontrer l'existence d'une unique solution faible $u \in L^2((0,T), H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T], L^2(\Omega))$ à l'équation de la chaleur sur Ω avec condition de Dirichlet
$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } (0,T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{dans } (0,T) \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

1. Définir le problème variationnel associé à l'équation (1).

2. Donner le développement formel d'une solution faible dans la base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$ de l'exercice précédent.
3. Démontrer que ce développement converge dans l'espace $L^2((0,T),H_0^1(\Omega))$, mais aussi dans l'espace $C^0([0,T],L^2(\Omega))$.
4. Conclure et montrer de plus que la solution faible vérifie l'estimée d'energie suivante pour tout temps $t\in[0,T]$,

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\|\nabla u(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s\leq C\bigg(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\|f(s,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}s\bigg).$$

Exercice 4 (Principe du maximum faible).
Soit $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un ouvert borné, $T>0$ et $Q_T=(0,T]\times\Omega$. On considère l'opérateur différentiel suivant

$$L=-\sum_{i,j=1}^d a^{i,j}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+\sum_{i=1}^n b^i(t,x)\partial_{x_i}+c(t,x),\quad (t,x)\in Q_T,$$

les coefficients $a^{i,j},b^i$ et c étant bornés sur $\overline{Q_T}$, avec en plus $a^{i,j}=a^{j,i}$. On suppose que l'opérateur ∂_t+L est uniformément parabolique, *i.e.* satisfait

$$\exists\theta>0,\forall(t,x)\in Q_T,\forall\xi\in\mathbb{R}^d,\quad\sum_{i,j=1}^d a^{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j\geq\theta|\xi|^2.$$

Démontrer que lorsque $c\equiv 0$, on a pour toute fonction $u\in C^{1,2}(Q_T)\cap C^0(\overline{Q_T})$,

$$\partial_t u+Lu\leq 0 \text{ sur } Q_T\quad\Longrightarrow\quad\max_{\overline{Q_T}}u=\max_{\Gamma_T}u,$$

où l'on a posé $\Gamma_T=(\{0\}\times\Omega)\cup([0,T]\times\partial\Omega)$.
Indication : On pourra s'inspirer du cas des équations elliptiques.

Exercice 5 (Equation non linéaire).
On garde les notations de la question précédente et on admet lorsque $c\geq 0$, on a pour toute fonction $u\in C^{1,2}(Q_T)\cap C^0(\overline{Q_T})$,

$$\partial_t u+Lu\leq 0 \text{ sur } Q_T\quad\Longrightarrow\quad\max_{\overline{Q_T}}u\leq\max_{\Gamma_T}u^+.$$

Soient $f\in C^1(\mathbb{R})$ et $u,v\in C^{1,2}(Q_T)\cap C^0(\overline{Q_T})$ deux fonctions satisfaisant l'équation suivante

$$\begin{cases}\partial_t v-\Delta v-f(v)\ \leq\ \partial_t u-\Delta u-f(u) & \text{in } Q_T,\\ \qquad\qquad v\ \leq\ u & \text{on } \Gamma_T.\end{cases}$$

Démontrer que $v\leq u$ sur Q_T.
Application : On considère $u\in C^{1,2}(Q_T)$ une solution de l'équation

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u\ =\ u(1-u)(u-a) & \text{in } Q_T,\\ \qquad u\ =\ 0 & \text{on } (0,T]\times\partial\Omega,\\ u(0,\cdot)\ =\ u_0 & \text{in } \Omega,\end{cases}$$

où $0<a<1$ est une constante positive et où u_0 est une donnée initiale régulière satisfaisant $0\leq u_0\leq 1$ dans Ω. Démontrer que $0\leq u\leq 1$ sur Q_T. Que dire de plus si $0\leq u_0<a$?