École Normale Supérieure de Lyon **Année 2023 - 2024**

Département de Mathématiques **M1 - EDP**

TD 9 : Equation de Schrödinger non linéaire cubique
Enoncé à reprendre

On étudie l'existence et l'unicité des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire cubique donnée par

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^2 u, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,\cdot) = u_0, \end{cases} \tag{NLS}$$

avec $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. On dira qu'une fonction u est solution de l'équation (NLS) si elle vérifie la relation de Duhamel suivante pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|^2 u)(s)\,\mathrm{d}s.$$

Précisément, on va démontrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c$, l'équation (NLS) admet une unique solution dans l'espace $L^3(\mathbb{R}, L^6(\mathbb{R}^2))$ et qui de plus appartient à l'espace $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2))$. Pour cela, on pourra utiliser les inégalités de Strichartz suivantes, qui sont une généralisation de celles présentées dans le TD 7

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^2))} \leq c(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2))}), \quad \frac{2}{p} + \frac{2}{q} = 1, \quad (p,q) \neq (2,\infty), \tag{1}$$

où u est solution de l'équation de Schrödinger suivante

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases}$$

On considère la fonctionnelle non-linéaire Q définie par

$$\begin{cases} i\partial_t Q(u) + \Delta Q(u) = |u|^2 u, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \\ Q(u)(0,\cdot) = 0, \end{cases}$$

ainsi que l'application

$$F(u) = e^{it\Delta} u_0 + Q(u).$$

1. Démontrer que la fonctionnelle Q envoie continûment l'espace $L^3(\mathbb{R}, L^6(\mathbb{R}^2))$ dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^3(\mathbb{R}, L^6(\mathbb{R}^2))$.
2. Vérifier que si $\|u_0\|_{L^2}$ est assez petite, alors une boule de la forme $B(0, c\|u_0\|_{L^2})$ de l'espace de Banach $L^3(\mathbb{R}, L^6(\mathbb{R}^2))$, avec $c > 0$ à choisir, est invariante par la fonctionnelle F.
3. En utilisant le théorème du point fixe de Banach, démonter qu'il existe une unique solution à l'équation (NLS) dans un voisinage de 0 dans l'espace $L^3(\mathbb{R}, L^6(\mathbb{R}^2))$.
4. Démontrer que cette solution appartient également à l'espace $L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2))$.
5. En s'inspirant de l'Exercice 3 du TD 7, démontrer les inégalités (1).
6. Aurait-on pu considérer des non-linéarités plus générales de la forme $|u|^{2\sigma} u$ avec $\sigma > 0$?
7. Aurait-on pu travailler plus généralement sur $\mathbb{R}^d$?