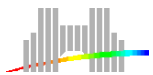
Parallélisation automatique
Bases théoriques

Paul Feautrier

ENS de Lyon
Paul.Feautrier@ens-lyon.fr

2 octobre 2008



Comment raisonner sur un programme ?

Position du problème :

Etant donné un programme séquentiel P, trouver un programme équivalent P' qui s'exécute efficacement sur une architecture parallèle donné.

- L'équivalence de deux programmes est indécidable
- Il faut bâtir une théorie
- Il faut se contenter d'une équivalence *incomplète*

Un exemple de théorie : la sémantique dénotationnelle.

Sémantique dénotationnelle naïve, I

On se donne deux ensembles primitifs, $\mathcal{A}$ (les adresses) et $\mathcal{V}$ (les valeurs). On suppose que $\mathcal{V}$ contient entre autres les booléens **tt** et **ff**.

On construit les ensembles suivants :

- $\mathcal{M} :: \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ (l'ensemble des fonctions des adresses vers les valeurs)
- $\mathcal{E} :: \mathcal{M} \to \mathcal{V}$ les expressions
- $\mathcal{S} :: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ les instructions

Sémantique dénotationnelle naïve, II

Ces ensembles sont définis à l'aide de fonctions de traduction, traditionellement notées [| |] qui associent un objet mathématique à une construction syntaxique. Par exemple :

- Si `n` est la représentation textuelle d'un entier, et n la valeur correspondante, alors :

$$\forall m \in \mathcal{M} : [|\mathtt{n}|](m) = n.$$

- Si `x` est un identificateur, et si x est l'adresse correspondante, alors :

$$\forall m \in \mathcal{M} : [|\mathtt{x}|](m) = m(x).$$

Sémantique dénotationnelle naïve, III

- Si e1 et e2 sont deux expressions, alors :

$$\forall m \in \mathcal{M} : [|\mathtt{e1} + \mathtt{e2}|](m) = [|\mathtt{e1}|](m) + [|\mathtt{e2}|](m).$$

  etc.

- Si x est un identificateur et e une expression, alors :

$$\forall m \in \mathcal{M} : [|\mathtt{x} := \mathtt{e}|](m) = m[x \leftarrow [|e|](m)],$$

  soit, en utilisant le λ-calcul naïf :

$$\forall m \in \mathcal{M} : [|\mathtt{x} := \mathtt{e}|](m) = \lambda y \textbf{ if } y = x \textbf{ then } [|\mathtt{e}|](m) \textbf{ else } m(y).$$

Sémantique dénotationnelle naïve, IV

Et la régle la plus importante, qui donne le sens de l'exécution séquentielle :
Si S1 et S2 sont deux instructions :

$$\forall m \in \mathcal{M} : [|\mathtt{S1}; \mathtt{S2}|](m) = [|\mathtt{S2}|]([|\mathtt{S1}|](m)),$$

ou encore :

$$[|\mathtt{S1}; \mathtt{S2}|] = [|\mathtt{S1}|] \circ [|\mathtt{S2}|],$$

où $\circ$ représente la composition de fonctions.

Et le parallélisme ?

La sémantique dénotationnelle est insuffisante pour raisonner sur un programme parallèle :

- On peut montrer facilement :

$$[|\mathtt{x} := \mathtt{x} + 1; \mathtt{x} := \mathtt{x} + 2|] = [|\mathtt{x} := \mathtt{x} + 3|]$$

- Si on exécute ces codes en parallèle avec `x := 0` les résultats sont différents. Les valeurs possibles de `x` sont 0, 2, 3 pour le membre gauche et 0 ou 3 pour le membre droit.
- Il n'y a donc pas équivalence du point de vue de la programmation parallèle.

Opérations, I

Une solution : la notion d'opération, qui permet de distinguer ce qui est exécuté de façon atomique et ce qui ne l'est pas.

- Une opération est l'exécution atomique d'une instruction
- Le choix de ce qu'est une instruction est arbitraire. On verra plus loin pourquoi
- On peut provisoirement imaginer qu'une opération est l'exécution d'une instruction en langage machine, ou d'une instruction d'un langage de haut niveau
- Dans l'exemple précédent, le membre gauche a deux opérations, le membre droit n'en a qu'une.

Pour fixer les idés : la durée d'un programme est grossièrement proportionnelle au nombre d'opérations exécutées.

Opération, II

Pour pouvoir raisonner sur les opérations, il faut pouvoir les nommer. On verra plus loin plusieurs méthodes. Il ne suffit pas de nommer l'instruction sous-jacente, parce qu'une même instruction peut être exécutée un grand nombre de fois.

- On note U l'ensemble des opérations d'un programme
- U peut être fini (programme) ou infini (système)
- U dépend en général des donnés du programme. On convient que U est l'union de toutes les opérations exécutés pour des donnés légitimes. Une exécution sélectionne un sous ensemble de U parfois appelé une *trace*
- Si $u \in U$, on note par extension $[|u|]$ la fonction sémantique associée à l'instruction exécutée par u.

Ordre d'exécution

La donnée de U ne suffit pas : il faut savoir dans quel ordre les opérations sont exécutés. On postule un ordre d'exécution, $<_{\text{seq}}$.

- On convient de n'utiliser que des ordres *stricts*

$$u <_{\text{seq}} v, v <_{\text{seq}} w \Rightarrow u <_{\text{seq}} w,$$

$$u <_{\text{seq}} v \Rightarrow \neg v <_{\text{seq}} u,$$

  ce qui implique $\neg u <_{\text{seq}} u$
- Si le programme est séquentiel, on peut toujours dire, de deux opérations, laquelle est exécutée la première. $<_{\text{seq}}$ est un ordre *total* :

$$u <_{\text{seq}} v \vee v <_{\text{seq}} u \vee u = v.$$

Construction de U et $<_{\text{seq}}$

Cette construction dépend du langage de programmation utilisé :

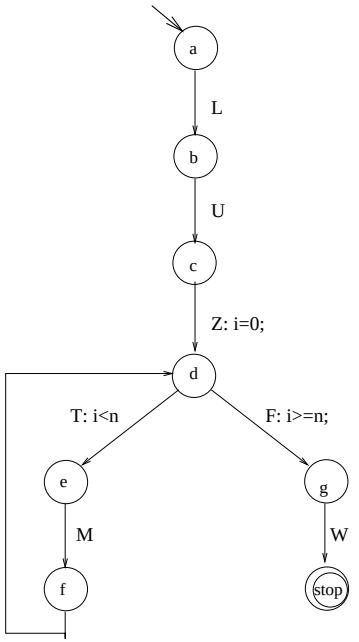
- Langage sans procédures : U est un langage rationel
- Langage avec procédures : U est un langage hors-contexte (langage algébrique). Les instructions `CALL` et `RETURN` fonctionnent comme les parenthèses d'un langage de Dick
- Langage sans tests ni boucles `WHILE` ni `GOTO` : U est une union de Z-polyèdres
- Il est beaucoup plus difficile de définir U pour un langage fonctionnel ou pour un langage logique.

Polyèdre : ensemble des solutions d'un système de contraintes linéaires, ou bien intersection d'un nombre fini de demi-espaces linéaires ou bien coque convexe d'un ensemble fini de points

Z-polyèdre Ensemble des points entiers d'un polyèdre.

Langage sans procédure

```
L: read y;
U: x = 1;
   for(i=0; i<n; i++)
M:   x *= y;
W: print x;
```



- Les états de l'automate sont les points stables entre instructions
- Chaque arc porte une instruction ou un test
- U est le langage engendré par l'automate

- Chaque mot du langage est une trace
- Chaque préfixe d'une trace est une opération. L'ordre d'exécution est l'ordre préfixe
- Une trace : `LUATMTMFW`
- Il est difficile de raisonner sur cette représentation, car beaucoup de questions que l'on se pose sont indécidables.

Programmes avec fonctions, esquisse

- On peut associer une grammaire à l'automate fini. On associe un non-terminal à chaque état. Par exemple, la production associée à l'état d est

$$d ::= Te|Fg$$

  La production associée à l'état terminal g est $d ::= W$
- une procédure est représentée par le non-terminal de son état initial
- si une instruction appelle une procédure, c'est le nom de la procédure qui figure sur l'arc correspondant
- par exemple, si on remplace `x *= y ;` par `h(x,y) ;` la production pour e devient

$$e ::= hf$$

  et la grammaire devient hors contexte.
- Les définitions de u, des traces et de l'ordre d'exécution ne changent pas.

Programmes à contrôle statique

- Un programme est à contrôle statique s'il n'a qu'une trace. Toutes les opérations de U sont exécutées.
- Pas de test et pas de boucle `WHILE` ; pas de `GOTO`
- La seule façon de réitérer une instruction est de l'inclure dans une boucle dont on sait compter les itérations :

```
for(i=0; i<100; i++)
```

- On peut légérement généraliser en paramétrant le nombre de tours :

```
for(i=0; i<n; i++)
```

- et même utiliser des bornes variables :

```
for(i=0; i<n; i++)
  for(j=0; j<i; j++)
```

On peut encore calculer le nombre de tours si la borne de la boucle interne dépend linéairement du compteur externe.

Nids de boucles

Un nid de boucles est un ensemble de boucles emboitées contenant des instructions exécutables (affectations).

- La *profondeur* d'une instruction est le nombre de boucles qui l'entourent.
- Le nid de boucles est *parfait* si toutes les instructions sont à la profondeur maximale.
- Chaque boucle a un *compte-tour* qui démare à 0, qui croit par pas de 1 et qui n'est pas modifié dans le corps de boucle. On suppose que les compte-tours ont des noms distincts.
- On distingue les boucles do, qui font un nombre de tours déterminé d'avance, et les boucles `while` dont le nombre de tours est pratiquement imprévisible.

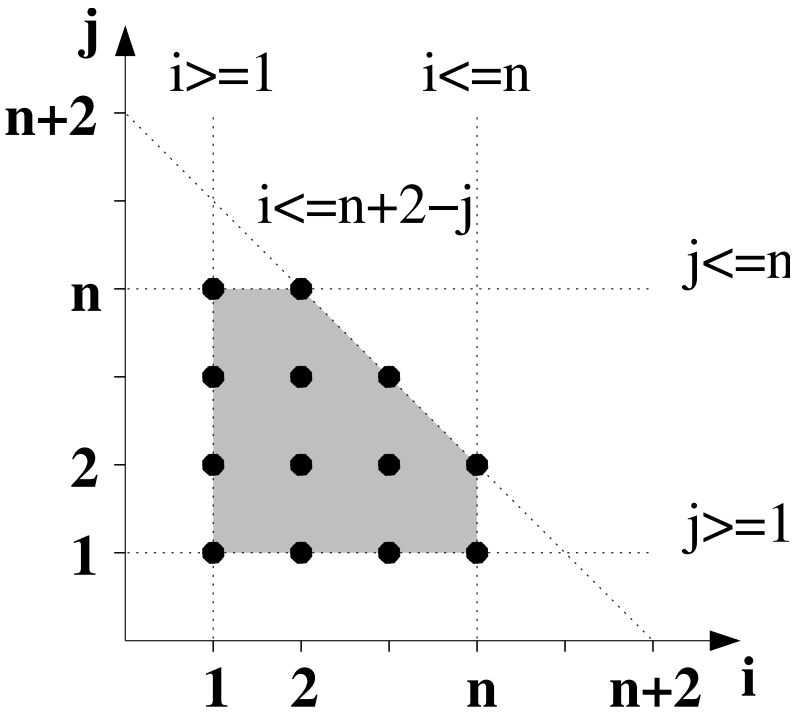
Vecteur d'itération

- Vecteur d'itération d'une instruction : liste des compte-tours des boucles englobantes, rangés de l'extérieur vers l'intérieur, et traitée comme un vecteur (pour simplifier les notations).
- Le vecteur d'itération est un objet mathématique ; ses composantes sont des variables dont on peu changer les noms et à qui on peut donner des valeurs (numériques ou algébriques).
- Une *opération* est caractérisée par le nom de l'instruction exécutée et par la valeur courante du vecteur d'itération : $\langle S, i \rangle$.

Espace et Domaine d'itération

- Espace d'itération : $\mathbb{N}^d$, où d est le nombre de boucles englobantes.
- Domaine d'itération : l'ensemble des valeurs légales du vecteur d'itération.
- Le domaine d'itération est délimité par les bornes des boucles et par des tests.
- Il peut être connu à la compilation (boucles `do`) ou seulement à l'exécution (boucles `while`).
- Il peut être paramétré.

Un exemple




```
for(i=1 ;i<=n; i++)
  for(j=1; j<=n; j++)
    if(i+j <= 2*n-2)
      S;
```

Ordre d'exécution, I/III

Relation d'ordre

- Toute relation réflexive, symétrique et transitive.
- Ordre strict associé : $x < y \equiv x \leq y \ \ \& \ \ x \neq y$.
- Ordre total : $x \leq y \vee y \leq x$.
- Un ordre qui n'est pas total est partiel.

Ordre d'exécution, II/III

- Dans un programme séquentiel, l'ordre d'exécution des opérations, $<_{\text{seq}}$, est entièrement fixé par le texte du programme et les instructions de contrôle.
- L'ordre d'exécution est *total*. Il vaut mieux travailler avec un ordre strict : éviter de dire qu'une opération est exécutée avant elle même.
- L'ordre engendré par les boucles est l'ordre lexicographique $\ll$.

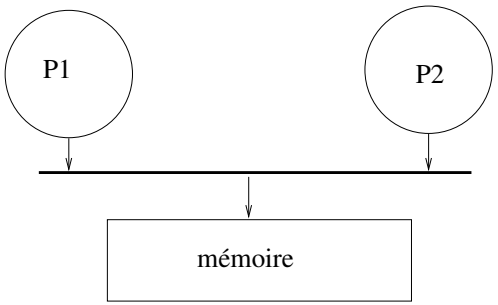
$$\begin{aligned} \langle S, i\rangle <_{\text{seq}} \langle T, j\rangle \quad &\equiv \quad i[1..N_{ST}] \ll j[1..N_{ST}] \\ &\vee \quad (i[1..N_{ST}] = j[1..N_{ST}] \ \ \& \ \ S <_{\text{text}} T) \end{aligned}$$

- $<_{\text{text}}$ l'ordre *textuel*.
- N_{ST} est le nombre de boucles englobant à la fois S et T.

Qu'est-ce qu'un programme parallèle ?

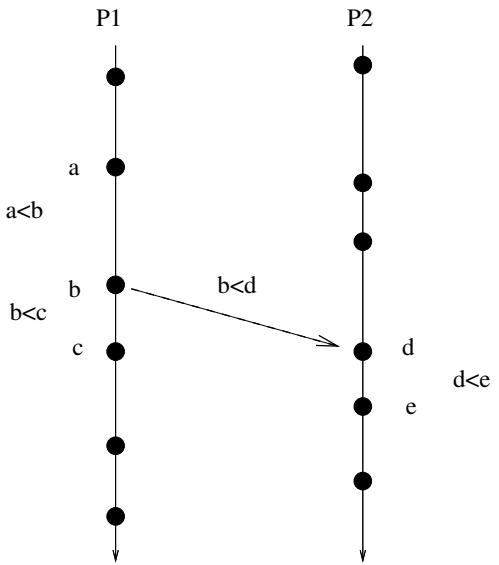
Observation : un programme parallèle a un ordre d'exécution *partiel*

Exemple 1

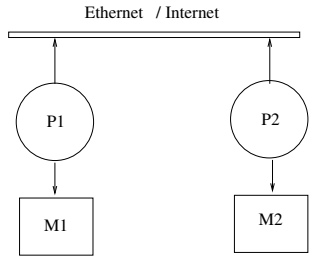


Symetric Multiprocessor

- Les horloges ne sont jamais exactement à la même fréquence
- Si deux opérations exécutées par des processeurs différents, on ne peut pas dire dans quel ordre, sauf opération spéciale de synchronisation.



Un autre exemple



- Deux ordinateurs reliés par un réseau, possiblement à très grande distance
- On suppose que P2 demande à P1 la valeur d'une de ses variables
- La valeur retournée va dépendre de l'état d'avancement de P1, en général imprévisible
- Solution : c'est P1 qui doit prendre l'initiative et P2 doit l'attendre
- On retrouve le schéma précédent

Bilan

- On retrouve la même situation dans d'autres cas : par exemple, en multitraitement, l'état d'avancement des processus dépend de la politique du système d'exploitation : imprévisible
- La situation pour les machines synchrones est différente, on y reviendra plus tard
- Bilan :
  - Un programme séquentiel a un ordre d'exécution total
  - Un programme parallèle a un ordre d'exécution partiel. Plus la relation d'ordre est "petite" (en tant qu'ensemble) et plus le programme est parallèle
  - Le programme totalement parallèle a un ordre d'exécution vide !

Parallélisme vrai / entrelacement

Que se passe-t-il si deux opérations veulent écrire simultanément en mémoire ?

- Rien de spécial : l'arbitre du bus en retarde une
- Mais il est pratiquement impossible de savoir laquelle est exécutée en dernier
- Autres exemples :
  - la détection des collisions sur un cable Ethernet
  - la modification d'une variable en section critique
  - le démon d'impression
- Tout se passe comme s'in n'y avait jamais de vrai parallélisme mais seulement *entrelacement* d'actions instantanées
- Exception : les réseaux recombinants.

Sémantique par entrelacement

Soit un programme dont l'ordre d'exécution est $<$.

- Une trace est une énumération des opérations

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

compatible avec $<$:

$$u_i < u_j \Rightarrow i < j.$$

- Si $<$ est total, alors il n'y a qu'une trace
- Si $<$ est partiel, il y a plusieurs traces. En particulier, si $<$ est l'ordre vide, il y a $n!$ traces.

Déterminisme et indéterminime

Effet d'une trace : composition des effets de chaque opération :

$$[|u_1; \ldots; u_n|] = [|u_1|] \circ \ldots \circ [|u_n|].$$

- Un programme séquentiel n'a qu'une seule trace et donc qu'un seul effet
- Pour qu'un programme parallèle soit équivalent à un programme séquentiel, il faut que toutes ses traces aient le même effet – qu'il soit *déterministe* – que celle de la version séquentielle

Commutation

On considère le programme séquentiel minimum :

```
u1 ; u2;
```

et sa seule parallélisation possible :

```
u1 // u2;
```

- Le programme parallèle a deux traces, qui doivent avoir le même effet :

$$[|u_1|] \circ [|u_2|] = [|u_2|] \circ [|u_1|]$$

- On dit que u_1 et u_2 commutent et on note $u_1 \smile u_2$
- Si u_1 et u_2 ne commutent pas, on dit qu'elles sont en dépendance et on écrit $u_1 \perp u_2$.

Exemples

- Il est facile de voir que `x = 1` et `y = 2` commutent (du moins si `x` et `y` sont des adresses distinctes)
- Par contre `x = 0` et `x = 1` ne commutent pas :

$$[|\mathtt{x} = 0; \mathtt{x} = 1|](m) = m[x \leftarrow 1],$$

$$[|\mathtt{x} = 1; \mathtt{x} = 0|](m) = m[x \leftarrow 0],$$

Dépendances

La relation de dépendance est l'intersection de la relation de non commutation et de l'ordre séquentiel :

$$\delta = \perp \cap <_{\text{seq}} .$$

La relation de dépendance rassemble les contraintes que doivent satisfaire toute les versions parallèles du programme.

- Graphe de dépendance détaillé (GDD) : un graphe dont les sommets sont les opérations, avec un arc de u vers v si $u \ \delta \ v$
- Ordre d'exécution parallèle : tout ordre plus fin que la fermeture transitive de la relation de dépendance :

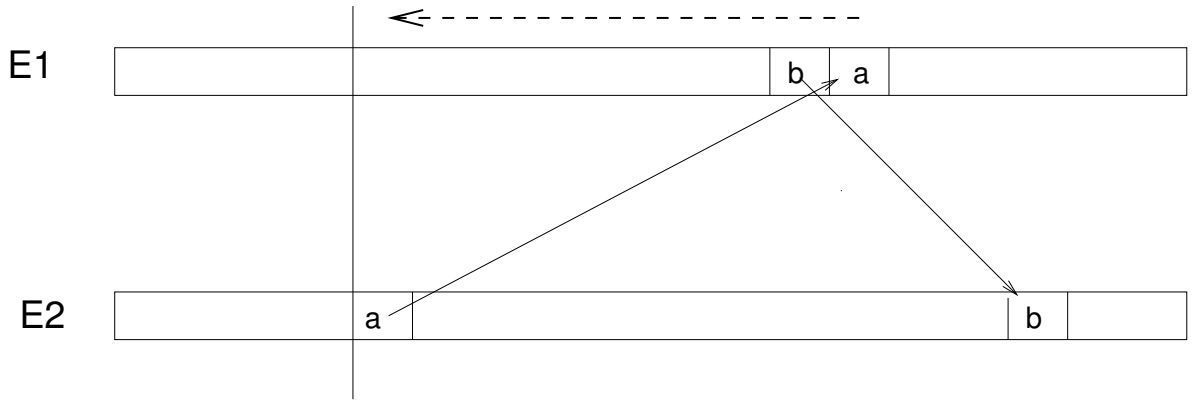
$$<_{//} \supseteq (\perp \cap <_{\text{seq}})^{+}$$

Lemme de commutation

Theorem

Toutes les exécutions possibles selon $<_{//}$ ont le même effet.

Démonstration.



On dit que l'ordre $<_{//}$ *satisfait* toutes les dépendances.
Cette démonstration dépend explicitement du fait que les exécutions sont finies.

Calcul des dépendances

- Pour savoir si deux opérations commutent, on peut avoir besoin de toutes les mathématiques
  - commutativité et associativité des opérateurs de l'arithmétique
  - $a[x^3] := \ldots$ et $\ldots := a[y^3 + z^3]$: le grand théorème de Fermat
- il est (actuellement) impossible de mettre un démonstrateur de théorème dans un compilateur
- il faut trouver une condition *suffisante* de commutation plus simple
- on emploie un raisonnement *pessimiste*

Conditions de Bernstein / I

```
S1 : y := f(x);
S2 : u := g(v);
```

- Si $y \equiv u$, alors $\mathtt{S1};\mathtt{S2} \approx u = g(v_0)$, $\mathtt{S2};\mathtt{S1} \approx u = f(x_0)$ et *il n'y pas de raison* pour que ces quantités soient égales. Il y a dépendance.
- Si $y \not\equiv u$ mais $y = v$, $\mathtt{S1};\mathtt{S2} \approx y = f(x_0), u = g(f(x_0))$, $\mathtt{S2};\mathtt{S1} \approx u = g(y_0), y = f(x_0)$, dépendance.
- Situation symétrique pour $u = x$.

Condition de Bernstein / II

- Condition suffisante d'indépendance :

Theorem

Pour que S1 *et* S2 *soient indépendantes, il suffit que* $y \neq u, y \neq v, u \neq x$.

- Plus généralement, $\mathcal{R}(S)$ ensemble des variables lues, $\mathcal{M}(S)$ ensemble des variables modifiées par S.

Theorem

Pour que S1 *et* S2 *soient indépendantes, il suffit que :*

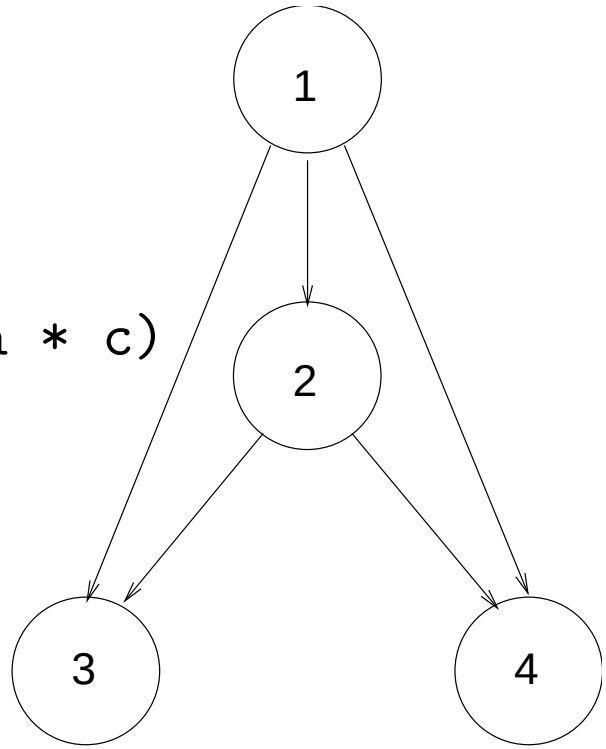
$$\mathcal{M}(S1) \cap \mathcal{M}(S2) = \emptyset,\ \mathcal{M}(S1) \cap \mathcal{R}(S2) = \emptyset,\ \mathcal{R}(S1) \cap \mathcal{M}(S2) = \emptyset.$$

- Ces conditions ne sont pas nécessaires :

```
S1 : x := x + 1;
S2 : x := x + 3;
```

Un Exemple

```
1  read a, b, c
2  delta = sqrt(b*b - 4.0 * a * c)
3  x1 = (-b + delta)/2.0/a
4  x2 = (-b - delta)/2.0/a
```



Lemme de commutation, le retour

Que se passe-t-il pour une exécution infinie ?

- Systèmes d'exploitation, systèmes transactionnels, traitement du signal
- Dans le cas d'un programme qui ne se termine pas, on ne peut plus parler de résultat
- Il faut considérer l'histoire de chaque variable

Définitions

- Trace : l'enregistrement de tout ce qui se passe lors d'une exécution. Tuples $<$ opération, variable affectée, valeur affectée, variables lues $>$.
- Histoire d'une variable x : une trace réduite aux opérations qui affectent x.
- Source de x au point k d'une trace t : l'opération antérieure la plus proche de k qui affecte x :

$$\sigma(x, t, k) = \max\{i \mid i < k, x \in M(t_i)\}.$$

Lemme de commutation, II

Lemma

Soit t une trace respectant l'ordre $<_{//}$ et x une variable. Dans l'histoire de v selon t, les opérations apparaissent dans le même ordre que dans le programme séquentiel original.

Démonstration.

En effet, toutes les opérations qui affectent x sont en dépendance, donc sont ordonnées par $<_{//}$ dans le même ordre que dans $<_{\text{seq}}$. □

Lemme de commutation, II

Lemma

Dans les mêmes conditions, la fonction source pour x dans t est le même que dans le programme séquentiel.

Démonstration.

Il suffit d'observer que le calcul d'une source de x ne fait intervenir que les opérations de l'histoire de x et leur ordre. □

Lemme de commutation, III

Theorem

Une variable quelconque a la même histoire dans toutes les exécutions selon l'ordre $<_{//}$.

Démonstration.

Soit deux traces t_1 et t_2, soit x une variable ayant pour histoires h_1 et h_2, et supposons que ces histoires divergent en position k. Il correspond à k deux positions k_1 et k_2 dans t_1 et t_2 et nous dirons que la divergence se manifeste à l'instant $\max(k_1, k_2)$. Comme les opérations sont déterministes et ont les mêmes sources dans les deux exécutions, il faut qu'il y ait une divergence pour l'une des sources aux instants respectifs $k_1' < k_1$ et $k_2' < k_2$. Il en résulte que $\max(k_1', k_2') < \max(k_1, k_2)$. On forme donc ainsi une suite de divergences qui se manifestent de plus en plus tôt. Ceci ne peut se poursuivre indéfiniment, puisque une trace a un début. On a donc trouvé une contradiction. □

Autres dépendances

Par extension, on introduit d'autres sortes de dépendances : tout ce qui contraint l'ordre d'exécution :

- Dépendances de contrôle : le prédicat d'un test doit être évalué avant ses branches. Idem pour le prédicat d'un `while`.
- Dépendances de ressources : deux opérations qui utilisent la même ressource ne peuvent pas être exécutées simultanément

On parle également de dépendances CC (*input dependence*) quand deux opérations lisent la même cellule de mémoire. Utile pour l'optimisation de la localité.

Agrégation

- Une propriété importante des ensembles lus et modifiés :

$$\mathcal{M}(u; v) \subseteq \mathcal{M}(u) \cup \mathcal{M}(v)$$

  et la formule analogue pour $\mathcal{R}$
- Il est facile de trouver des exemples où l'inclusion est stricte. Il s'agit donc d'un cas de pessimisme
- Ceci justifie tous les cas d'agrégation, où l'on considère un groupe d'opération (e.g. l'exécution d'une boucle ou d'une fonction) comme une seule opération.