NOTES

ÉTUDE DU COMPORTEMENT A L'INFINI DE L'INTENSITÉ SPÉCIFIQUE DANS UNE ATMOSPHÈRE PLANE PARALLÈLE

P. FEAUTRIER

Observatoire de Meudon, 92-Meudon

Dans une atmosphère plane parallèle, il est bien connu que l'intensité spécifique $I(z, \mu, \nu)$ satisfait à l'équation de transfert :

$$(1) \qquad \mu \frac{dI(z, \mu, \nu)}{dz} = \varkappa(z, \nu)\,(I(z, \mu, \nu) - S(z, \nu)).$$

Pour les valeurs négatives de la variable on a la condition :

$$(2) \qquad I(0, \mu, \nu) = 0, \quad \mu < 0,$$

qui exprime que l'atmosphère ne reçoit aucun rayonnement incident.

Lorsque μ est positif, on utilise la condition :

$$(3) \qquad I(z, \mu, \nu)\, e^{-\int_0^z \varkappa(x, \nu)\, dx/\mu} \to 0 \quad \text{si} \quad z \to \infty \;\; \mu > 0.$$

Elle est justifiée par des considérations physiques par Kourganoff (1952), ou par Chandrasekhar (1960) Busbridge (1960) montre d'autre part que si cette condition n'est pas réalisée la fonction source doit tendre exponentiellement vers l'infini avec z. Il nous a paru intéressant de montrer que cette condition peut s'établir à partir de la constance du flux, sans utiliser d'autres hypothèses que la positivité des fonctions I et S et le fait qu'une atmosphère semi-infinie est infiniment épaisse à toutes les longueurs d'ondes.

Nous introduisons la profondeur optique $\tau(z, \nu)$, définie par :

$$\begin{cases} d\tau(z, \nu) = \varkappa(z, \nu)\, dz, \\ \tau(-\infty, \nu) = 0. \end{cases}$$

Nous admettrons que $S(z, \nu)$ et $I(z, \mu, \nu)$ sont des fonctions presque partout continues de leurs arguments.

L'équation de transfert (1) peut s'intégrer formellement par la méthode de la variation des constantes ; on trouve :

$$(4) \qquad I(z, \mu, \nu)\, e^{-\frac{\tau(z, \nu)}{\mu}} - I(z', \mu, \nu)\, e^{-\frac{\tau(z', \nu)}{\mu}} = \int_z^{z'} S(x, \nu)\, e^{-\frac{\tau(x, \nu)}{\mu}} \varkappa(x, \nu) \frac{dx}{\mu}.$$

Pour avoir un sens physique, les quantités I et S doivent être positives. Il en résulte que l'intégrale du second membre de (4) est bornée supérieurement quel que soit z, donc converge quand z' tend vers l'infini. Il en résulte que, dans les mêmes conditions, $I(z, \mu, \nu)\, e^{-\tau(z, \nu)/\mu}$ a une limite $j(\mu, \nu)$ et que l'on a :

$$(5) \qquad I(z, \mu, \nu) = j(\mu, \nu)\, e^{\frac{\tau(x, \nu)}{\mu}} + \int_z^{\infty} S(x, \nu)\, e^{\frac{\tau(z, \nu) - \tau(x, \nu)}{\mu}} \varkappa(x, \nu) \frac{dx}{\mu}.$$

$j(\mu, \nu)$ est une fonction presque partout continue non négative.

Dans le cas où $\mu < 0$, si dans (4) nous faisons $z' = 0$ et que nous utilisons la condition (2), il vient :

$$(6) \qquad I(z, -\mu, \nu) = \int_0^z S(x, \nu)\, e^{\frac{\tau(x, \nu) - \tau(z, \nu)}{\mu}} \varkappa(x, \nu) \frac{dx}{\mu},$$

et l'intégrale au second membre de cette expression est majorée par :

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant z} S(x, \nu).$$

Calculons le flux total :

$$\begin{aligned}
(7) \qquad \frac{1}{2} F(z) &= \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} I(z, \mu, \nu)\, \mu\, d\mu\, d\nu \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^1 j(\mu, \nu)\, e^{\frac{\tau(z, \nu)}{\mu}}\, \mu\, d\mu\, d\nu \\
&+ \int_0^{\infty} \int_0^1 \int_z^{\infty} S(x, \nu)\, e^{\frac{\tau(z, \nu) - \tau(x, \nu)}{\mu}} \varkappa(x, \nu)\, dx\, d\mu\, d\nu \\
&- \int_0^{\infty} \int_0^1 \int_0^z S(x, \nu)\, e^{\frac{\tau(x, \nu) - \tau(z, \nu)}{\mu}} \varkappa(x, \nu)\, dx\, d\mu\, d\nu.
\end{aligned}$$

Puisque S est non négative :

$$\begin{aligned}
(8) \qquad \frac{1}{2} F(z) &\geqslant \int_0^{\infty} \int_0^1 j(\mu, \nu)\, e^{\frac{\tau(z, \nu)}{\mu}}\, \mu\, d\mu\, d\nu \\
&- \int_0^{\infty} \int_0^1 \int_0^z S(x, \nu)\, e^{\frac{\tau(x, \nu) - \tau(z, \nu)}{\mu}} \varkappa(x, \nu)\, dx\, d\mu\, d\nu
\end{aligned}$$

l'intégrale

$$\int_0^z S(x, \nu)\, e^{\frac{\tau(x, \nu) - \tau(z, \nu)}{\mu}} \varkappa(x, \nu) \frac{dx}{\mu}$$

est majorée par

$$\max S(x, \nu), \quad 0 \leqslant x \leqslant z,$$

et il est impossible que cette quantité croisse plus vite que $e^{\tau(z, \nu)}$.

En effet supposons que $\forall Z$, A, $\exists z$ tel que

$$\max S(x, \nu) > Ae^{\tau(z, \nu)} \quad z > Z, \quad 0 \leqslant x \leqslant z.$$

Soit alors Z′ et A. Il existe Z″ tel que

$$Ae^{\tau(z, \nu)} > \max S(x, \nu) \quad \forall z > Z'', \quad 0 \leqslant x \leqslant Z',$$

à condition que $\tau(z, \nu) \to \infty$ avec z.

D'autre part

$$\exists z \text{ tel que } \max S(x, \nu) > Ae^{\tau(z, \nu)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant z, \quad z \geqslant Z'',$$

le point x où S atteint son maximum ne peut appartenir à l'intervalle (o, Z') on a donc :

$$\exists x \text{ tel que } S(x, \nu) > Ae^{\tau(z, \nu)} > Ae^{\tau(x,} \quad Z' \leqslant x,$$

l'intégrale (5) ne peut donc converger. Il en résulte que pour z suffisamment grand, le terme prépondérant de (8) est :

$$\int_0^\infty \int_0^1 j(\mu, \nu)\, e^{\frac{\tau(z, \nu)}{\mu}} \mu\, d\mu\, d\nu,$$

or, par double application du théorème de la moyenne

$$\int_0^\infty \int_0^1 j(\mu, \nu)\, e^{\frac{\tau(z, \nu)}{\mu}} \mu\, d\mu\, d\nu \geqslant e^{\tau_{min}(z)} \int_0^\infty \int_0^1 \mu j(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu,$$

$$\tau_{min}(z) = \min \tau(z, \nu).$$

Si nous supposons que $\varkappa(z, \nu)$ est tel que $\tau_{min}(z)$ tende vers l'infini avec z il en résulte que F(z) tend vers l'infini avec z ; sauf si

$$\int_0^\infty \int_0^1 \mu j(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu = 0. \tag{9}$$

Or, dans la plupart des cas physiques, F(z) est une constante, ou tout au moins ne tend pas vers l'infini. Donc l'intégrale (9) est nulle.

Comme j est non négatif, il en résulte que :

$$j(\mu, \nu) = 0.$$

C'est-à-dire que :

$$\lim_{z \to \infty} I(z, \mu, \nu)\, e^{-\frac{\tau(z, \nu)}{\mu}} = 0, \quad \mu > 0.$$

Manuscrit reçu le 15 *décembre* 1966.

BIBLIOGRAPHIE

BUSBRIDGE I. W., 1960, The Mathematics of radiative transfer. Cambridge University Press.
CHANDRASEKHAR S., 1960, Radiative Transfer, Dover, New York.
KOURGANOFF V., 1952, Basic Methods in transfer problems. Oxford University Press, 1952.