J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. Vol. 3, pp. 103-105. Pergamon Press Ltd., 1963. Printed in Great Britain

SOLUTIONS A FLUX CONSTANT DE L'EQUATION DE TRANSFERT

PAUL FEAUTRIER
Observatoire de Paris—Meudon

LA MÉTHODE utilisée est une généralisation au cas non-gris de la méthode de Wick–Chandrasekhar.

A. Dans le cas gris on a à résoudre l'équation différentielle:

$$\mu \frac{d}{d\tau} I(\tau, \mu) = I(\tau, \mu) - B(\tau) \tag{1}$$

avec les conditions aux limites:

$$\begin{cases} I(0, \mu) = 0 & \mu < 0 \\ I(\tau, \mu)e^{-\tau} \to 0 \begin{cases} \mu > 0 \\ \tau \to \infty \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

$B(\tau)$ étant déterminé de façon que:

$$\int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu)\mu \, d\mu = F \tag{3}$$

La méthode de Wick–Chandrasekhar peut se décomposer en trois opérations:

(a) On montre que la condition (3) équivaut á:

$$B(\tau) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu) \, d\mu$$

D'où la nouvelle forme de (1):

$$\mu \frac{d}{d\tau} I(\tau, \mu) = I(\tau, \mu) - \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu) \, d\mu \tag{1'}$$

qui est une équation intégrodifférentielle linéaire.

(b) On exprime l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} I \, d\mu$$

par une somme finie et (1′) devient:

$$\mu_i \frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}\tau} = I_i - \tfrac{1}{2} \sum_j a_j I_j \tag{1″}$$

qui est un systémé d'équations différentielles couplées.

(c) On forme la solution générale de (1″) et on determine la solution particuliére qui satisfait aux conditions (2).

B. Dans le cas non gris, l'équation à résoudre est:

$$\left.\begin{aligned} g\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} I(p, r, \nu) &= (\kappa_\nu + \sigma) I(p, \mu, \nu) - \kappa_\nu B_\nu\{T(p)\} - \sigma I_\nu(p) \\ B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} & \qquad I_\nu(p) = \tfrac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(p, \mu, \nu) \mathrm{d}\mu \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

Les conditions aux limites sont:

$$\left.\begin{aligned} & I(0, \mu, \nu) = 0 \qquad \mu < 0 \\ & I(p, \mu, \nu) \exp\{-\tau(\nu, p)\} \to 0 \qquad \mu > 0 \\ & \qquad\qquad p \to \infty \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

$T(p)$ doit être choisi de façon que:

$$\int_0^\infty \int_{-1}^{+1} I(p, \mu, \nu) \mu \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}_\nu = F \tag{III}$$

(*a*) On montre que (III) est équivalent à:

$$\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T) \mathrm{d}\nu = \int_0^\infty \kappa_\nu I_\nu(p) \mathrm{d}\nu$$

ce qui est une équation en T. T est donc une fonctionnelle de $I(p, \mu, \nu)$ donnée sous forme implicite, ce que nous notons:

$$T(p) = T\{I(p, \mu, \nu)\}$$

L'équation (I) devient alors:

$$g\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} I(p, \mu, \nu) = (\kappa_\nu + \sigma) I(p, \mu, \nu) - \sigma I_\nu(p) - \kappa_\nu B_\nu[T\{I(p, \mu, \nu)\}] \tag{I′}$$

ce qui est une équation différentielle—fonctionnelle non linéaire.

(b) En remplacant les intégrales par des sommes finis, on remplace (I′) par un systême d'équations differentielles couplées non linéaires:

$$\left.\begin{aligned} g\mu_i \frac{\mathrm{d}I_{\nu_i}}{\mathrm{d}p} &= (\kappa_\nu + \sigma)I_{\nu i} - \sigma I_\nu - \kappa_\nu B_\nu(T) \\ I_\nu &= \tfrac{1}{2}\sum_j a_j I_{\nu j} \\ \sum_\nu w_\nu \kappa_\nu B_\nu(T) &= \sum_\nu w_\nu \kappa_\nu I_\nu(p). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II″)}$$

(*c*) Il est impossible d'obtenir la solution générale de (I″). On commence l'intégration a $p = 0$ en utilisant une méthode approchée (du type de Runge–Kutta) par exemple. L'inconnue est le spectre sortant $I(0, \mu, \nu)$; $\mu > 0$.

Partant d'une valeur approchée de ce spectre on calcule $I(p, \mu, \nu)$ pour $p < p_1$. Les intensités ainsi obtenues ne satisfont pas au deuxième groupe des conditions (II). Un processus itératif complexe permet de corriger les valeurs de départ.

DISCUSSION

J. C. PECKER: A quelle profondeur optique les "modèles" actuellement calculés par M. Feautrier commencent-ils à s'écarter nettement du modele idéal vérifiant la seconde condition aux limites imposées?

P. FEAUTRIER: La profondeur maximum atteinte avant que les valeurs des intensités perdent toute signification est de l'ordre de $\tau_\nu = 2$.

A. B. UNDERHILL: How great a range in τ must you consider with your method in order to obtain sufficient accuracy at $\tau = 0$?.

R. CAYREL: In Feautrier's method, the fact that the boundary conditions are complete at the surface allows one to compute the full radiation field at $\tau = 2$ without pushing the numerical integration beyond that point.

P. FEAUTRIER: La résolution de l'équation de l'approximation de Milne-Eddington pose les mêmes problèmes que elle de l'équation de transfert exacte. Le problème est plus difficile à résoudre que ceux qui se posent en mècanique quantique car on doit ajuster un grand nombre de valeurs initiales.