ASTROPHYSIQUE THÉORIQUE. — *Sur la résolution numérique de l'équation de transfert.* Note (*) de M. **Paul Feautrier**, présentée par M. André Lallemand.

Dans une atmosphère plane parallèle, l'équation de transfert du rayonnement peut se mettre sous la forme

$$\mu \frac{dI(\nu, \mu, x)}{dx} = \chi(\nu, x)\{I(\nu, \mu, x) - S(\nu, x)\}. \tag{I}$$

La fonction source $S(\nu, x)$ peut, en général, s'écrire

$$S(\nu, x) = \int_0^\infty p(\nu, \nu', x)\,\bar{I}(\nu', x)\,d\nu' + R(\nu, x),$$

$$\bar{I}(\nu, x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} I(\nu, \mu, x)\,d\mu.$$

En général, $\chi(\nu, x)$, $p(\nu, \nu', x)$, $S(\nu, x)$ sont des fonctionnelles de $\bar{I}(\nu, x)$. Cependant, on peut, à un stade donné d'un processus itératif, les évaluer en fonction de l'approximation précédente pour $I(\nu, \mu, x)$ et les considérer comme des fonctions connues pour évaluer l'approximation suivante.

Nous introduisons le changement de fonctions inconnues :

$$J(\nu, \mu, x) = \frac{I(\nu, \mu, x) + I(\nu, -\mu, x)}{2},$$

$$F(\nu, \mu, x) = \frac{I(\nu, \mu, x) - I(\nu, -\mu, x)}{2}.$$

Les équations (1) prennent alors la forme

$$\frac{\mu^2}{\chi(\nu, x)}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\chi(\nu, x)}\frac{dJ(\nu, \mu, x)}{dx}\right) = J(\nu, \mu, x) - S(\nu, x),$$

$$\bar{I}(\nu, x) = \int_0^1 J(\nu, \mu, x),$$

$$F(\nu, \mu, x) = \frac{\mu}{\chi(\nu, x)}\frac{dJ(\nu, \mu, x)}{dx}.$$

Les conditions aux limites sont de la forme

$$\alpha_1(\nu, \mu)\frac{dJ(\nu, \mu, x_1)}{dx} + \beta_1(\nu, \mu)\,J(\nu, \mu, x_1) = S_1(\nu, \mu),$$

$$\alpha_l(\nu, \mu)\frac{dJ(\nu, \mu, x_l)}{dx} + \beta_l(\nu, \mu)\,J(\nu, \mu, x_l) = S_l(\nu, \mu),$$

x_1, x_l sont les limites de la couche étudiée; α_1, β_1, α_l, β_l, S_1, S_l des fonctions connues. Nous introduisons les formules de quadrature :

$$\text{(II)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 f(\mu)\,d\mu \simeq \sum_{k=1}^{m} h_k f(\mu_k),\\ &\int_0^\infty g(\nu)\,d\nu \simeq \sum_{i=j}^{n} w_j g(\nu_j). \end{aligned}\right.$$

Le système (II) se réduit à un système d'un nombre fini d'équations différentielles couplées.

Soit $\{x_i\}$ $i = 1, l$ une division de $[x_1, x_l]$. Notons pour abréger

$$\chi_i = \chi(\nu_i, \nu), \qquad J_i = J(x_i, \nu, \mu).$$

Introduisons une formule de dérivation approchée :

$$\text{(III)}\quad \frac{1}{\chi}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\chi}\frac{dJ}{dx}\right) = \frac{d^2J}{d\tau^2} \simeq 8\,\frac{\dfrac{J_{i+1}-J_i}{(\chi_{i+1}+\chi_i)\,(x_{i+1}-x_i)} - \dfrac{J_i - J_{i-1}}{(\chi_i+\chi_{i-1})\,(x_i - x_{i-1})}}{(\chi_{i+1}+\chi_i)\,(x_{i+1}-x_i) + (\chi_i+\chi_{i-1})\,(x_i-x_{i-1})}.$$

Évaluons de même les dérivées dans (III) à l'aide de formules du type :

$$\left(\frac{dJ}{dx}\right)_1 = \frac{J_2 - J_1}{x_2 - x_1}.$$

La résolution du système différentiel et de ses conditions aux limites est alors ramenée à celui d'un système linéaire à $n \times m \times l$ inconnues et $n \times m \times l$ équations. En regroupant dans chaque équation les termes relatifs à chaque profondeur x_i, on met ce système sous la forme

$$\text{(IV)}\qquad -A_i\vec{J}_{i-1} + B_i\vec{J}_i - C_i\vec{J}_{i+1} = \vec{S}_i,$$

ou $\vec{J}_i$ est le vecteur à nm composantes

$$(\vec{J}_i)_{jk} = J(x_i, \nu_j, \mu_k),$$

de même

$$(\vec{S}_i)_{jk} = S(x_i, \nu_j),$$

A_i, B_i, C_i sont des matrices $nm \times nm$ dont les coefficients sont faciles à évaluer. On notera que pour $i = 1$ et $i = l$ les matrices A, B, C sont particulières. On a, par exemple,

$$A_1 = 0, \qquad C_l = 0.$$

On résoud le système (IV) en tirant avantage de sa structure tridiagonale par bloc à l'aide des formules

$$\vec{v}_1 = B_1^{-1}\vec{S}_1, \qquad D_1 = B_1^{-1} C_1,$$
$$\vec{v}_i = (B_i - A_i D_{i-1})^{-1}\vec{S}_i, \qquad D_i = (B_i - A_i D_{i-1})^{-1} C_i \qquad (i = 2, l),$$
$$\vec{J}_l = \vec{v}_l,$$
$$\vec{J}_i = \vec{v}_i + D_i \vec{J}_{i+1} \qquad (i = l - 1, 1).$$

Ces formules sont un cas particulier de la méthode d'élimination de Gauss par réduction à la forme triangulaire inférieure.

Cas des modèles à flux constant. — Dans ce cas,

$$\chi(\nu, x) = \varkappa(\nu, x) + \sigma(x),$$
$$p(\nu, \nu', x) = \frac{\varkappa(\nu, x)\, B(\nu, x)\, \varkappa(\nu', x)}{\varkappa(\nu, x)\int_0^\infty B(\nu'', T)\,\varkappa(\nu'', x)\, d\nu''} + \frac{\sigma(x)}{\chi(\nu, x)}\,\delta(\nu - \nu'),$$

$B(\nu, T)$ est la fonction de Planck, le paramètre T (température) étant fixé par la condition

$$\text{(V)} \qquad \int_0^\infty \varkappa(\nu, x)\, B(\nu, T)\, d\nu = \int_0^\infty \varkappa(\nu, x)\, \bar{I}(\nu, x)\, d\nu,$$

$\delta(\nu - \nu')$ est la distribution de Dirac.

$\varkappa(\nu, x)$ et $\sigma(x)$ sont les coefficients d'absorption relatifs respectivement à l'absorption pure et à la diffusion par les électrons libres.

On prend pour conditions aux limites :

$$\frac{\mu}{\chi(\nu, 0)}\,\frac{dJ(\nu, \mu, 0)}{dx} - J(\nu, \mu, 0) = 0,$$
$$J(\nu, \mu, x_l) = B(\nu, T_l),$$

T_l étant un paramètre du modèle étudié.

Les premiers essais de résolution, utilisant un coefficient schématique, ont montré que l'itération (V) converge rapidement.

Étude des écarts à l'équilibre thermodynamique local dans les raies. — Ce problème conduit à une équation de transfert de la forme (I). La méthode de résolution exposée ici a été appliquée par Yvette Cuny; les résultats de ce travail sont exposés dans une autre Note [1].

(*) Séance du 9 mars 1964.
(1) Yvette Cuny, *Comptes rendus*, 258, 1964, p. 3192

(Observatoire de Paris-Meudon.)