

THÉORIE DES CLASSIFICATIONS STELLAIRES

I. Construction de modèles en équilibre thermodynamique local.

Paul FEAUTRIER

Observatoire de Paris-Meudon 92.

RÉSUMÉ. — *Ce travail a pour but d'étudier une nouvelle méthode pour la construction de modèles d'atmosphères en équilibre radiatif et thermodynamique. Cette méthode est une extension de la méthode des ordonnées discrètes de Chandrasekhar ; on utilise une méthode de Fox pour résoudre les systèmes d'équations différentielles avec conditions aux limites que l'on obtient ainsi.*

Cette méthode a été appliquée à la construction d'une grille de modèles dans la zone :

$$5\,000^{\circ}\text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 50\,000^{\circ}\text{ K}, 300 \leq g \leq 100\,000.$$

Ces modèles permettent de calculer des discontinuités de Balmer et des gradients ultraviolets en bon accord avec les observations de Chalonge et de son groupe ; par contre l'accord n'est pas très bon pour les gradients bleus.

SUMMARY. — *A new method for the construction of model atmospheres in radiative and thermodynamical equilibrium is reported. This method is an extension to non-grey problems of the method of discrete ordinates of Chandrasekhar, and uses a technique of Fox to handle the resulting system of differential equations with two-point boundary conditions. The method has been applied to the construction of a grid of model atmospheres in the range :*

$$5\,000^{\circ}\text{ K} \leq T_{\text{eff}} \leq 50\,000^{\circ}\text{ K}, 300 \leq g \leq 100\,000.$$

The Balmer jump and the ultra-violet gradient computed from these models agree fairly well with observations of Chalonge and his group ; however, the agreement is not so good for the blue gradient.

INTRODUCTION

L'une des méthodes les plus précises d'interprétation des spectres stellaires consiste à comparer ceux-ci à des « modèles », c'est-à-dire à des atmosphères idéales où des hypothèses simplificatrices permettent le calcul complet du spectre.

Une première étape dans ce travail consiste à calculer la variation de la température en fonction de la profondeur de l'atmosphère idéale ; pour les étoiles chaudes, cette variation dépend essentiellement des phénomènes de rayonnement continu et de leur interaction avec la matière de l'atmosphère ; on peut, par contre, négliger les phénomènes de convection et, au moins, en première approximation, l'existence des raies dans le spectre.

Même dans le cadre de ces hypothèses simplificatrices, la construction d'un modèle pose des problèmes dont la résolution n'a pu être envisagée qu'avec l'apparition des moyens modernes de calcul électronique. C'est ainsi que, jusqu'en 1957 environ, la plupart des auteurs⁽¹⁾ se sont bornés à indiquer de très nombreuses méthodes, sans pouvoir les exploiter jusqu'au bout.

Le problème de la construction d'un modèle, dans le cadre des hypothèses que nous énonçons au paragraphe II, se ramène à la résolution d'un système intégral-différentiel non linéaire. Ce système peut être, à son tour, transformé en une équation intégrale, également non linéaire.

Les méthodes de résolutions se classent en deux

⁽¹⁾ Pour une liste exhaustive de ces méthodes, on se reportera à PECKER (1965).

groupes : celles qui s'attaquent directement au système intégral-différentiel et celles qui se basent sur la formulation intégrale. Au premier groupe, appartiennent les recherches de CHANDRASEKHAR (1960) sur la méthode des ordonnées discrètes et le cas gris. Presque toutes les autres méthodes proposées appartiennent au second groupe. C'est l'emploi d'un ordinateur électronique puissant qui nous a permis de généraliser la méthode de CHANDRASEKHAR au cas non gris, aboutissant ainsi aux procédés de calcul exposés au paragraphe IV. Le paragraphe V discute les résultats obtenus et les difficultés rencontrées.

Le but de ce travail n'est pas de discuter la valeur des hypothèses simplificatrices de la théorie des modèles en équilibre ; cette discussion doit, à notre avis, se faire en éliminant une à une ces simplifications et en comparant les résultats obtenus. Il n'est pas non plus de comparer les spectres obtenus aux étoiles réelles. Il nous a cependant paru intéressant de montrer que nos calculs correspondent au moins approximativement avec les observations de CHALONGE et DIVAN (1952).

II. HYPOTHÈSES DE TRAVAIL.

1. Structure de l'atmosphère et équilibre hydrostatique.

Nous supposons que l'atmosphère est constituée de couches horizontales homogènes et immobiles, d'étendue latérale infinie. Dans ces conditions, toutes les caractéristiques de l'atmosphère ne dépendent que d'une seule variable de profondeur, par exemple la distance z à un niveau de référence arbitraire, comptée positivement vers le centre de l'étoile.

L'atmosphère est alors caractérisée du point de vue thermodynamique par la température et la pression en chaque point, $T(z)$ et $p(z)$.

Nous supposons que le plasma constituant la matière stellaire peut être assimilé à un gaz parfait,

$$(II.1) \quad p = NkT,$$

où p est la pression totale, et N le nombre de particules par unité de volume, et qu'une formule analogue détermine la pression partielle de chaque type de particules du plasma.

Si la matière de l'atmosphère n'est animée d'aucun mouvement, la pression est déterminée par l'équation de l'équilibre hydrostatique :

$$(II.2) \quad d(p + p_R) = \rho g dz,$$

où g est l'accélération de la pesanteur, que nous

supposons constante dans l'atmosphère, ρ la densité et p_R la pression de radiation.

L'équation de l'équilibre hydrostatique doit être complétée par la condition initiale :

$$(II.3) \quad p(-\infty) = 0.$$

2. Équation de transfert.

En négligeant les effets de polarisation, on peut admettre que le rayonnement électromagnétique en chaque point de l'atmosphère est caractérisé par l'intensité spécifique ⁽¹⁾ :

$$I(z, \mu, \nu),$$

où μ est le cosinus de l'angle de la direction de propagation du rayonnement avec la direction des z négatifs. La variation de I due aux phénomènes d'absorption, diffusion et émission est alors décrite par l'équation de transfert :

$$(II.4) \quad \mu \frac{dI(z, \mu, \nu)}{dz} = \kappa(z, \nu) (I(z, \mu, \nu) - S(z, \nu)).$$

Dans cette équation, $\kappa(z, \nu)$ est le coefficient d'absorption linéaire et $S(z, \nu)$ la fonction source. Nous avons admis que ces deux quantités sont indépendantes de l'angle de propagation.

L'équation de transfert doit être complétée par les conditions aux limites :

$$I(0, \mu, \nu) = 0 \text{ si } \mu < 0 \text{ (pas de rayonnement incident),}$$

$$(II.5) \quad I(z, \mu, \nu) e^{-\int_0^z \kappa(z, \nu) \frac{dz}{\mu}} \rightarrow 0 \text{ si } z \rightarrow \infty, \mu > 0.$$

Cette dernière condition découle de la positivité de I et S , et de la condition de constance du flux. Pour sa justification, on se reportera à FEAUTRIER (1967).

On sait, d'autre part, qu'il est utile d'introduire la profondeur optique définie par l'équation différentielle :

$$(II.6) \quad d\tau(z, \nu) = \kappa(z, \nu) dz,$$

et la condition initiale

$$(II.7) \quad \tau(-\infty, \nu) = 0.$$

Avec ces notations, le gradient de la pression de radiation est donné par :

$$(II.8) \quad \frac{dp_R}{dz} = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \kappa(z, \nu) \int_{-1}^{+1} I(z, \mu, \nu) d\nu d\mu.$$

⁽¹⁾ La quantité désignée par I représente une luminance. Le terme d'« intensité » est cependant d'utilisation courante en théorie du transfert du rayonnement et nous l'utiliserons dans la suite de ce travail.

3. Équilibre radiatif.

Le flux d'énergie transporté par le rayonnement électromagnétique est défini par l'équation :

$$(II.9) \quad \frac{\mathcal{F}}{\pi} = F = 2 \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} I(z, \mu, \nu) d\nu d\mu.$$

Si le seul moyen de transport d'énergie efficace est le transport radiatif, alors F doit être indépendant de z . C'est la condition d'équilibre radiatif. La température effective T_{eff} de l'étoile est reliée à F par :

$$(II.10) \quad F = \int_0^\infty B(\nu, T_{\text{eff}}) d\nu,$$

où $B(\nu, T)$ est la luminance du corps noir donnée par la fonction de Planck.

La condition d'équilibre radiatif peut également s'exprimer en écrivant que $\frac{dF}{dz} = 0$. Cette dérivée peut s'évaluer en utilisant l'équation de transfert (II. 4) et on obtient la condition de Strömgen :

$$(II.11) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty \kappa(z, \nu) (I(z, \mu, \nu) - S(z, \nu)) d\mu d\nu = 0.$$

4. Équilibre thermodynamique local.

Le coefficient d'absorption et la fonction source dépendent du nombre d'atomes de chaque espèce qui se trouvent dans chacun des niveaux quantiques possibles. Cette population se calcule en écrivant que les phénomènes tendant à dépeupler un niveau équilibrent ceux tendant à le peupler ; cependant, lorsque la densité de la matière stellaire est suffisante, les causes principales de ces variations de population sont les collisions interatomiques et électroniques. Dans ce cas, les populations sont données par la loi de Boltzmann pour les niveaux liés, par la loi de Maxwell pour les niveaux libres et par la loi de Saha pour l'équilibre d'ionisation. La fonction source est alors donnée par la loi de Kirchhoff :

$$(II.12) \quad S(z, \nu) = \frac{\kappa(z, \nu) B(\nu, T(z)) + \sigma(z, \nu) J(z, \nu)}{\kappa(z, \nu)},$$

$$\kappa(z, \nu) = \kappa(z, \nu) + \sigma(z, \nu),$$

$$J(z, \nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(z, \mu, \nu) d\mu.$$

Dans cette équation, $\kappa(z, \nu)$ est le coefficient d'absorption proprement dit, et $\sigma(z, \nu)$ est le coefficient de diffusion. $J(z, \nu)$ est l'intensité moyenne.

Cette forme de la fonction source implique que l'indicatrice de diffusion soit isotrope. Il n'en est en général rien : les principaux diffusants sont les électrons libres, pour lesquels l'indicatrice de diffusion est donnée par la loi de Rayleigh. Mais, CHANDRASEKHAR (1960) a montré que l'erreur commise en remplaçant cette indicatrice par une indicatrice isotrope est négligeable, sauf au voisinage immédiat de la surface de l'étoile.

Le coefficient d'absorption contient des termes correspondant à chacune des transitions qu'un photon de fréquence ν peut induire dans la matière constituant l'atmosphère de l'étoile. Ces transitions peuvent intervenir entre niveaux liés (raies) ou entre niveaux libres ou encore entre un niveau lié et un niveau libre (continuum). Comme l'absorption due aux raies spectrales est concentrée dans un domaine étroit au voisinage de la fréquence de Bohr de la transition, le coefficient correspondant a une variation très brutale et il est très difficile d'en tenir compte dans l'établissement d'un modèle de première approximation. Nous ne tiendrons compte dans cette étude que des termes continus dans le coefficient d'absorption.

III. CALCUL DU COEFFICIENT D'ABSORPTION.

3.1 Calcul des populations.

Nous supposons que l'atmosphère contient un certain nombre de particules portant ou non des charges électriques positives ou négatives. Nous classerons ces particules par espèce chimique, par degré d'ionisation et par degré d'excitation. Soit c_{ijk} le nombre de particules d'espèce i portant la charge $j|e|$, au niveau d'énergie E_{ijk} , par unité de volume. Nous noterons :

$$(III.1) \quad c_{ij} = \sum_k c_{ijk},$$

$$c_i = \sum_j c_{ij},$$

$$x_i = \frac{c_i}{\sum_i c_i},$$

x_i est l'abondance de l'espèce i .

De même, c_e est le nombre d'électrons libres par unité de volume.

La pression électronique est donnée par :

$$(III.2) \quad p_e = c_e kT,$$

et la pression totale par :

$$(III.3) \quad p = \left(\sum_i c_i + c_e \right) kT,$$

soit $\alpha_{ijk}(\nu)$ le coefficient d'absorption d'une particule d'espèce i électrisée j fois, excitée dans le k -ième niveau, à la fréquence ν .

Soit, d'autre part, $\beta_{ij}(\nu, T)$ le coefficient d'absorption pour les transitions libre-libre par unité de pression électronique et par ion de type i ionisé ($j+1$) fois, à la température T et à la fréquence ν .

Alors, le coefficient d'absorption continu est donné par :

$$(III.4) \quad \kappa(z, \nu) = \sum_{ijk} \alpha_{ijk}(\nu) c_{ijk} + \sum_{ij} \beta_{ij}(\nu, T) c_{ij+1} p_e.$$

Pour calculer les c_{ijk} , nous utilisons outre la relation de définition de la pression totale et de la pression électronique, la relation de Boltzmann :

$$(III.5) \quad \frac{c_{ijk}}{c_{ijk'}} = \frac{g_{ijk}}{g_{ijk'}} e^{-(E_{ijk}/kT - E_{ijk'}/kT)},$$

la relation de Saha :

$$(III.6) \quad \frac{c_{ij+1}}{c_{ij}} p_e = \frac{2U_{ij+1}}{U_{ij}} \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} (kT)^{5/2} e^{-W_{ij}/kT},$$

et la condition de neutralité de l'atmosphère

$$(III.7) \quad \sum_{ij} j c_{ij} = c_e.$$

Dans ces formules, on a posé :

$$(III.8) \quad U_{ij} = \sum_k g_{ijk} e^{-E_{ijk}/kT},$$

W_{ij} est le potentiel d'ionisation de la particule de type i ionisée j fois.

Connaissant p et T , nous pouvons résoudre ces équations pour obtenir p_e et les c_{ijk} , ce qui permet le calcul de κ et de σ .

Pour effectuer ce calcul, nous avons utilisé la liste d'éléments et les abondances de VARDYA (1961).

3.2. Calcul des coefficients d'absorption par niveau.

3.21. *Hydrogène neutre.* — Les coefficients d'absorption par niveau ont été calculés à l'aide des formules de MENZEL et PECKERIS (1935). En particulier, les facteurs de Gaunt ont été évalués exactement.

3.22. *Ion H^- .* — Nous avons utilisé les valeurs de GELTMANN (1962). Un programme simple permet d'interpoler dans la table fournie par GELTMANN.

3.23. *Hélium neutre.* — Nous avons utilisé les résultats de S. S. HUANG (1948) pour les niveaux $1S$, 2^3S , 2^1S . Les autres niveaux ont été considérés comme hydrogénoïdes, la valeur de la charge effective vue par l'électron optique ayant été déduite de la position du niveau.

3.24. *Hélium ionisé.* — C'est un ion hydrogé-

noïde qui a été traité comme l'hydrogène neutre.

3.25. *Carbone neutre.* — Nous avons utilisé les valeurs de F. PRADERIE (1964).

3.26. *Magnésium neutre.* — Tous les niveaux ont été traités comme hydrogénoïde, sauf pour le niveau $3s^2 1S$ où l'on a utilisé les valeurs de G. PEACH (1962) et le niveau $3p^3 3P^o$ où l'on a utilisé la valeur expérimentale de BÖTTCHER (1958).

3.27. *Silicium neutre.* — Tous les niveaux ont été traités comme hydrogénoïde, sauf pour le fondamental pour lequel on a utilisé les valeurs de O. GINGERICH (1965).

3.3. Calcul des coefficients d'absorption libre-libre.

Nous avons traité tous les ions comme hydrogénoïde, excepté l'ion H^- . Pour celui-ci, nous avons utilisé les tables de T. L. JOHN (1966), complétées par un programme d'interpolation en longueur d'onde et en température. Pour les ions hydrogénoïdes, nous avons utilisé les formules de MENZEL et PECKERIS (1935).

3.4. Calcul du coefficient de diffusion.

Nous n'avons tenu compte que de la diffusion par les électrons libres ; le coefficient correspondant est donné par :

$$(III.9) \quad \sigma(z, \nu) = \sigma_0 \frac{1}{p - p_e},$$

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2.$$

IV. MÉTHODE DE RÉOLUTION.

4.1. Caractérisation du problème.

L'ensemble des formules données aux paragraphes II et III permettent, par résolution de l'équation (II. 11) de calculer la température pour une pression donnée et pour une valeur connue de la fonction $I(z, \mu, \nu)$. De cette valeur de la température, nous pouvons déduire les divers coefficients d'absorption et en conséquence, les valeurs des dérivées $\frac{dI}{dz}$ et $\frac{dp}{dz}$. Notre problème est donc la résolution d'un système différentiel, où le nombre de fonctions inconnues est infini. Comme le calcul des dérivées fait intervenir une intégrale portant sur la fonction inconnue I , un tel système est intégral-différentiel. Vu la façon compliquée dont les quantités κ et B dépendent de la température, ce système est évidemment non linéaire.

Les fonctions inconnues doivent d'autre part, satisfaire aux conditions aux limites (II. 3) et (II. 5). Comme ces conditions font intervenir les deux extrémités de l'intervalle de variation de la variable indépendante z , le problème est du type « conditions aux limites » et non du type « conditions initiales » ⁽¹⁾.

4.2 Il est facile de voir que, quelque soit le sens de variation de z , une moitié des équations (II. 4) est instable : les équations pour lesquelles $\mu dz > 0$ conduisent à des solutions croissant exponentiellement avec z . Il est donc impossible d'envisager une méthode d'essais systématiques pour la résolution de notre problème. Nous avons donc choisi de discrétiser le problème en remplaçant les intégrales

et les dérivées par des formules approchées, puis de résoudre le système d'équations simultanées ainsi obtenu. Comme cette résolution ne peut être envisagée que si le système est linéaire, nous avons défini un processus itératif dont chaque étape est linéaire et dont la limite est la solution du problème discret.

4.3 Linéarisation.

Le problème peut être linéarisé de bien des façons.

Nous avons choisi la plus simple, qui donne des résultats satisfaisants.

Nous mettons dans l'expression (II.12) de la fonction source, la fonction de Planck sous la forme :

$$(IV.1) \quad \kappa(z, \nu) B(z, \nu) = \frac{\kappa(z, \nu) B(z, \nu)}{\int_0^\infty \kappa(z, \nu') B(z, \nu') d\nu'} \int_0^\infty \kappa(z, \nu') J(z, \nu') d\nu'.$$

Ce remplacement est une identité quand la relation (II.11) est satisfaite. Nous introduisons d'autre part la moyenne de Rosseland, définie par :

$$(IV.2) \quad \bar{\kappa}(z) = \frac{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{1}{\bar{\kappa}(z, \nu)} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu},$$

et la profondeur optique moyenne associée

$$(IV.3) \quad \bar{\tau} = \int_{-\infty}^z \bar{\kappa} dz,$$

que nous prendrons comme variable indépendante de profondeur.

Nous pouvons donc réécrire l'équation de transfert en fonction des quantités :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}, x(\bar{\tau}, \nu) &= \frac{\kappa(z, \nu)}{\bar{\kappa}(z)}, \quad s(\bar{\tau}) = \frac{\sigma(z)}{\bar{\kappa}(z)}, \\ r(\bar{\tau}, \nu) &= \frac{\kappa(z, \nu) B(\nu, z)}{\int_0^\infty \kappa(z, \nu') B(\nu', z) d\nu'} \end{aligned}$$

et nous obtenons

$$(IV.4) \quad \mu \frac{dI_\nu}{d\bar{\tau}} = (x_\nu + s) I_\nu - r_\nu \int_0^\infty x_{\nu'} J_{\nu'} d\nu' - s J_\nu.$$

Si nous nous donnons les valeurs $T^{(n)}$ et $p^{(n)}$ des fonctions $T(\tau)$ et $p(\tau)$, nous pouvons en déduire les quantités auxiliaires x, s, r . L'équation (IV.4) associée à ses conditions aux limites (II. 5) constitue un système intégrodifférentiel linéaire que nous pouvons résoudre par les techniques décrites dans FEAUTRIER (1964), techniques s'inspirant des méthodes de FOX (1957) et réutilisées dans de nombreux domaines de la physique mathématique.

(Voir par exemple WRUBEL (1962) pour une application aux problèmes de structure interne).

Nous obtenons ainsi une fonction $I^{(n+1)}(\bar{\tau}, \mu, \nu)$ d'où nous déduisons une nouvelle fonction $T(\bar{\tau})$ par résolution de :

$$(IV.5) \quad 2 \int_0^\infty \kappa(\nu, T^{(n+1)}(\bar{\tau}), p^{(n)}(\bar{\tau})) B(\nu, T^{(n+1)}(\bar{\tau})) d\nu \\ = \int_0^\infty \kappa(\nu, T^{(n+1)}(\bar{\tau}), p^{(n)}(\bar{\tau})) \int_{-1}^{+1} I^{(n+1)}(\bar{\tau}, \mu, \nu) d\mu d\nu.$$

La nouvelle loi $p(\bar{\tau})$ se déduit alors de l'intégration de l'équation différentielle

$$(IV.6) \quad \frac{dp^{(n+1)}(\bar{\tau})}{d\bar{\tau}} = \frac{g - \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \mu I^{(n+1)}(\bar{\tau}, \mu, \nu) \kappa(\nu, T^{(n+1)}(\bar{\tau}), p^{(n+1)}(\bar{\tau})) d\mu d\nu}{\bar{\kappa}(T^{(n+1)}(\bar{\tau}), p^{(n+1)}(\bar{\tau}))}.$$

(IV.5) peut se résoudre par un processus itératif

⁽¹⁾ Pour la classification des problèmes différentiels, on consultera le livre de FOX (1957).

simple, accéléré à l'aide de l'algorithme d'Aitken (voir par exemple Modern Computing Methods (1962)). Nous avons jusqu'ici utilisé pour résoudre (IV. 6)

une méthode de Runge et Kutta, mais un procédé du type d'Adams doit donner plus rapidement des résultats plus précis.

L'itération ainsi définie converge d'autant plus rapidement que les quantités t , x et s varient moins avec la température et la pression. Or, on remarquera que ces quantités sont des quantités réduites et que tout facteur multiplicatif indépendant de ν s'en élimine. Par exemple, on sait que lorsque l'atmosphère est composée d'hydrogène pur et que l'on néglige la diffusion, le coefficient d'absorption se met sous la forme :

$$\kappa(\nu, T, p) = \Phi(\nu, T) \psi(T, p),$$

et donc que :

$$x_\nu = \frac{\Phi(\nu, T)}{\int_0^\infty \frac{1}{\Phi(\nu', T)} \frac{\partial B(\nu', T)}{\partial T} d\nu'},$$

$$r_\nu = \frac{\Phi(\nu, T) B(\nu, T)}{\int_0^\infty \Phi(\nu', T) B(\nu', T) d\nu'}.$$

x_ν et r_ν ne dépendent plus de la pression. Comme les atmosphères réalistes sont en grande partie composées d'hydrogène, x_ν et r_ν ne dépendront que faiblement de la pression. De même, x_ν et r_ν ne dépendent que faiblement de la température. C'est ce qui explique la convergence de notre procédé.

4.4. Résolution de l'équation de transfert linéarisée.

On introduit, d'abord les parties paire y et impaire f de la fonction $I(\bar{\tau}, \mu, \nu)$

$$y(\tau, \mu, \nu) = \frac{I(\bar{\tau}, \mu, \nu) + I(\bar{\tau}, -\mu, \nu)}{2},$$

$$f(\bar{\tau}, \mu, \nu) = \frac{I(\bar{\tau}, +\mu, \nu) - I(\bar{\tau}, -\mu, \nu)}{2}.$$

Il est facile de déduire de l'équation de transfert (IV.4) les équations différentielles satisfaites par y et f :

$$\frac{\mu}{x_\nu + s} \frac{df}{d\bar{\tau}} = y - \frac{r_\nu}{x_\nu + s} \int_0^\infty x_{\nu'} J_{\nu'} d\nu' - \frac{s}{x_\nu + s} J_\nu$$

$$\frac{\mu}{x_\nu + s} \frac{dy}{d\bar{\tau}} = f.$$

$$(IV.12) \quad \left. \frac{d^2 y_\nu}{d\tau_\nu^2} \right|_{\tau_k} \simeq \alpha_\nu y_\nu \Big|_{\tau_{k+1}} - (\alpha_\nu + \beta_\nu) y_\nu \Big|_{\tau_k} + \beta_\nu y_\nu \Big|_{\tau_{k-1}}$$

Les coefficients α et β se déterminent en écrivant que la formule est exacte lorsque y_ν est une fonction du second degré en τ_ν ; on trouve :

$$(IV.13) \quad \alpha_k = \frac{2}{(\tau_\nu|_{\tau_{k+1}} - \tau_\nu|_{\tau_k})(\tau_\nu|_{\tau_{k+1}} - \tau_\nu|_{\tau_{k-1}})}$$

$$\beta_k = \frac{2}{(\tau_\nu|_{\tau_k} - \tau_\nu|_{\tau_{k-1}})(\tau_\nu|_{\tau_{k+1}} - \tau_\nu|_{\tau_{k-1}})}$$

L'élimination de f entre ces deux équations conduit à l'équation suivante pour y :

$$(IV.7) \quad \frac{\mu}{x_\nu + s} \frac{d}{d\bar{\tau}} \left(\frac{\mu}{x_\nu + s} \frac{dy}{d\bar{\tau}} \right) =$$

$$y - \frac{r_\nu}{x_\nu + s} \int_0^\infty x_{\nu'} J_{\nu'} d\nu' - \frac{s}{x_\nu + s} J_\nu,$$

$$J_\nu = \int_0^1 y(\bar{\tau}, \mu, \nu) d\mu.$$

Selon la technique de CHANDRASEKHAR, les intégrales intervenant dans (IV.7) sont remplacées par des sommes finies, à l'aide des formules :

$$(IV.8) \quad \int_0^1 \varphi(\mu) d\mu \simeq \sum_{i=1}^m h_i \varphi(\mu_i),$$

$$\int_0^\infty \varphi(\nu) d\nu \simeq \sum_{j=1}^n w_j \varphi(\nu_j).$$

Ces formules permettent de définir une approximation du système (IV.7) par un système différentiel fini aux mn fonctions inconnues

$$y_{ij}(\bar{\tau}, \mu_i, \nu_j).$$

Contrairement à ce qui se passe dans les cas étudiés par CHANDRASEKHAR, il est impossible de former la solution analytique de ce système, et nous devons utiliser des techniques numériques. Pour cela, nous remplaçons dans (IV.7) les dérivées par des différences. Définissons la variable τ_ν (profondeur optique monochromatique) par :

$$\tau_\nu(0) = 0,$$

$$d\tau_\nu = (x_\nu + s) d\bar{\tau},$$

(IV.7) se réécrit alors :

$$(IV.11) \quad \mu^2 \frac{d^2 y_\nu}{d\tau_\nu^2} = y_\nu - \frac{r_\nu}{x_\nu + s} \int_0^\infty x_{\nu'} J_{\nu'} d\nu' - \frac{s}{x_\nu + s} J_\nu.$$

Nous choisissons une subdivision $\{\tau_k\}$ ($k = 1, p$) et nous écrivons :

et les différences intervenant dans cette formule peuvent s'évaluer par la méthode des trapèzes :

$$\tau_\nu \Big|_{\tau_{k+1}} - \tau_\nu \Big|_k = \frac{1}{2} \left((x_\nu + s) \Big|_{\tau_{k+1}} + (x_\nu + s) \Big|_{\tau_k} \right) (\tau_{k+1} - \tau_k)$$

Au total, la résolution de (IV.7) se ramène à

celle d'un système d'équations linéaires aux inconnues $y(\tau_k, \mu_i, \nu_j)$.

La condition initiale (II.5) se met sous la forme :

$$y(0, \mu, \nu) = f(0, \mu, \nu),$$

soit encore, en exploitant l'équation de transfert :

$$y(0, \mu, \nu) = \mu \frac{dy}{d\tau_\nu} \Big|_{\tau=0},$$

dont l'équivalent discret est :

$$(IV.14) \quad y(0, \mu_i, \nu_j) = \mu \frac{y(\tau_2, \mu_i, \nu_j) - y(0, \mu_i, \nu_j)}{\tau_{vj} \Big|_{\tau_2}}.$$

Au total, si nous désignons par \vec{Y}_k le vecteur à n dimensions de composantes :

$$(\vec{Y}_k)_{ij} = y(\tau_k, \mu_i, \nu_j).$$

Le système d'équations linéaires approximativement équivalent à (II.7) peut se mettre sous la forme :

$$(IV.15) \quad A_k \vec{Y}_{k+1} - B_k \vec{Y}_k + C_k \vec{Y}_{k-1} = 0,$$

A_k, B_k, C_k sont des matrices ($m \times m$) faciles à expliciter. (IV.4) se met sous la forme :

$$(IV.16) \quad A_1 Y_2 - B_1 Y_1 = 0.$$

La quantité $I(\bar{\tau}, \mu, \nu) e^{-\frac{\tau(z, \nu)}{\mu}}$ ($\mu > 0$) représente l'influence de l'intensité au niveau z sur l'intensité émergente au niveau 0 ⁽¹⁾. Or, la deuxième condition (II.5) indique que cette influence tend vers 0 quand z tend vers l'infini. Nous pouvons donc, pourvu que τ_p soit suffisamment grand ; donner à $I(\tau_p, \mu, \nu)$ ($\mu > 0$) une valeur arbitraire. Nous avons choisi pour accélérer la convergence du procédé, la valeur de I qui donne à y la valeur $B(\nu, T(\tau_p))$.

Il est bien connu en effet que, aux grandes profondeurs, les intensités $I(\bar{\tau}, \mu, \nu)$ tendent vers la fonction de Planck $B(\nu, T(\bar{\tau}))$.

Nous pouvons ainsi remplacer la deuxième condition (II.5) par :

$$(IV.17) \quad y(\tau_p, \mu, \nu) = B(\nu, T(\tau_p)),$$

à condition que τ_p soit suffisamment grand.

$T(\tau_p)$ devient le paramètre fixant la température du modèle au lieu de T_{eff} . Cette particularité de la

méthode n'est gênante que pour comparer entre eux des modèles d'auteurs différents. Pour construire une grille de modèles ou pour ajuster un modèle à une étoile donnée, il est équivalent de varier T_{eff} ou le paramètre $T(\tau_p)$. La température effective se déduit de la résolution de l'équation :

$$\int_0^\infty B(\nu, T_{\text{eff}}) d\nu = 4 \int_0^\infty \int_0^{+1} \mu y(0, \mu, \nu) d\mu d\nu.$$

Dans les calculs que nous avons effectués jusqu'ici, nous avons pris $\tau_p = 10$. La subdivision de $\{0, \tau_p\}$ a été établie de façon à ce que la variation moyenne de l'intensité d'un point à un autre soit constante. Nous appelons variation moyenne la quantité :

$$(IV.18) \quad \nu_k = \frac{\int_0^\infty \int_0^1 |y(\tau_k, \mu, \nu) - y(\tau_{k-1}, \mu, \nu)| d\mu d\nu}{\int_0^\infty \int_0^1 (y(\tau_k, \mu, \nu) + y(\tau_{k-1}, \mu, \nu)) d\mu d\nu}.$$

Cet ajustement peut être réalisé très simplement de façon automatique. On remarquera que la condition (IV.8) revient à imposer approximativement l'égalité des variations relatives de la température

$$\nu'_k = \frac{|T(\tau_k) - T(\tau_{k-1})|}{T(\tau_k) + T(\tau_{k-1})}.$$

L'ensemble des équations (IV.15) écrites aux points $\{\tau_k\}$, $k = (2, p-1)$, des équations (IV.16) et (IV.17) forment un système de $p \ m \ n$ équations linéaires aux $p \ m \ n$ inconnues $(\vec{Y}_k)_{ij}$. Toutefois, il serait désavantageux de résoudre ce système sans tenir compte de sa structure particulière. Pour cela, on définit la matrice R_k par la condition :

$$(IV.19) \quad \vec{Y}_{k-1} = R_k \vec{Y}_k,$$

(IV.16) permet d'évaluer R_2 :

$$\vec{Y}_1 = B_1^{-1} A_1 \vec{Y}_2,$$

$$R_2 = B_1^{-1} A_1,$$

(IV.15) permet alors d'obtenir R_k par récurrence :

$$(IV.20) \quad A_k \vec{Y}_{k+1} - B_k \vec{Y}_k + C_k R_k \vec{Y}_k = 0$$

$$\vec{Y}_k = (B_k - C_k R_k)^{-1} A_k \vec{Y}_{k+1},$$

$$R_{k+1} = (B_k - C_k R_k)^{-1} A_k.$$

⁽¹⁾ Voir FEAUTRIER (1967), formule (4).

Une fois les matrices R_k ($k = 2, p$) évaluées, l'équation (IV.19) permet de proche en proche, le calcul des \vec{Y}_k à partir de \vec{Y}_p connu.

V. RÉSULTATS.

5.1 Discussion de la méthode.

5.11 *Convergence.* — Il va de soi que le problème posé peut se linéariser de bien des manières et que les itérations peuvent être construites de différentes façons. Les premiers essais employaient la pression comme variable indépendante, et en conséquence, l'équation de transfert linéarisée faisait intervenir

κ_v , κ_v et σ , et non pas $\frac{\kappa_v}{\kappa}$, $\frac{\kappa_v}{\kappa}$ et $\frac{\sigma}{\kappa}$, comme (IV.4).

Dans ces conditions, la convergence était très lente ; les premières itérations fixaient très rapidement la loi $T(\bar{\tau})$, et les autres permettaient l'intégration de l'équation différentielle (IV.6) par une méthode équivalente à celle de Picard, dont on sait la lenteur.

Le processus défini au paragraphe 4 donne une suite de fonction $T^{(n)}(\bar{\tau})$ dont la convergence est encore relativement lente ; mais il est facile de l'accélérer. Il suffit par exemple de remplacer $T^{(n+1)}(\bar{\tau})$ par $1/2 (T^{(n+1)}(\bar{\tau}) + T^{(n)}(\bar{\tau}))$ pour obtenir des résultats corrects. Une autre méthode consiste à définir les quantités suivantes :

$$(V.1) \quad F^{(n+1)}(\bar{\tau}) = 4 \int_0^1 d\mu \int_0^\infty d\nu \mu f^{(n+1)}(\bar{\tau}, \mu, \nu),$$

$$F^{(n+1)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L F^{(n+1)}(\bar{\tau}) d\bar{\tau},$$

$$\Delta F^{(n+1)} = \frac{\max}{\bar{\tau}} (\bar{\tau}) [F^{(n+1)}(\bar{\tau}) - \overline{F^{(n+1)}}],$$

$$\alpha^{(n+1)}(\bar{\tau}) = \frac{|F^{(n+1)}(\bar{\tau}) - \overline{F^{(n+1)}}|}{\Delta F^{(n+1)}}.$$

On remplace alors $T^{(n+1)}(\bar{\tau})$ par :

$$\frac{1}{2} ((1 + \alpha^{(n+1)}(\bar{\tau})) T^{(n+1)}(\bar{\tau}) + (1 - \alpha^{(n+1)}(\bar{\tau})) T^{(n)}(\bar{\tau})).$$

Le processus ainsi défini converge très rapidement : il suffit en général de 3 à 5 itérations pour obtenir un flux constant à quelques millièmes près. La figure (1) représente quelques flux ainsi obtenus.

5.12. *Stabilité.* — De toutes les instabilités que peut présenter la méthode de Fox utilisée pour résoudre (IV. 4) (voir CUNY (1967) et WACHPRESS (1962)), la seule qui se soit présentée dans ce travail était due à des pas $(\tau_{k+1} - \tau_k)$ trop petits, de l'ordre de 10^{-6} au voisinage de la surface. En contrôlant le pas à l'aide de la « variation moyenne » définie en (IV.18), des pas aussi petits ne se présentent heureusement jamais. Par contre, il est impossible d'intégrer l'équation différentielle (IV.6) donnant la pression à l'aide des mêmes pas. Il a été nécessaire de séparer complètement ces deux parties du programme.

5.13 *Précision.* — La précision des résultats (et également le temps de calcul !) est fonction croissante des paramètres suivants :

— le nombre n de longueurs d'onde dans la formule (IV.9)

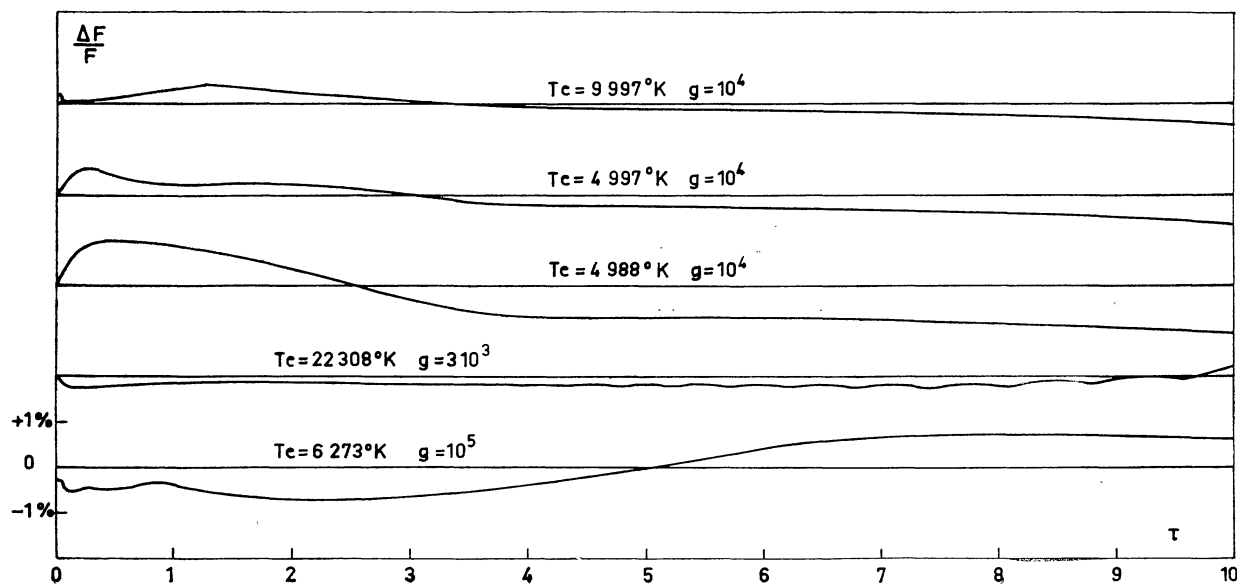


FIG. 1. — Erreur relative sur le flux pour 5 modèles d'atmosphère.

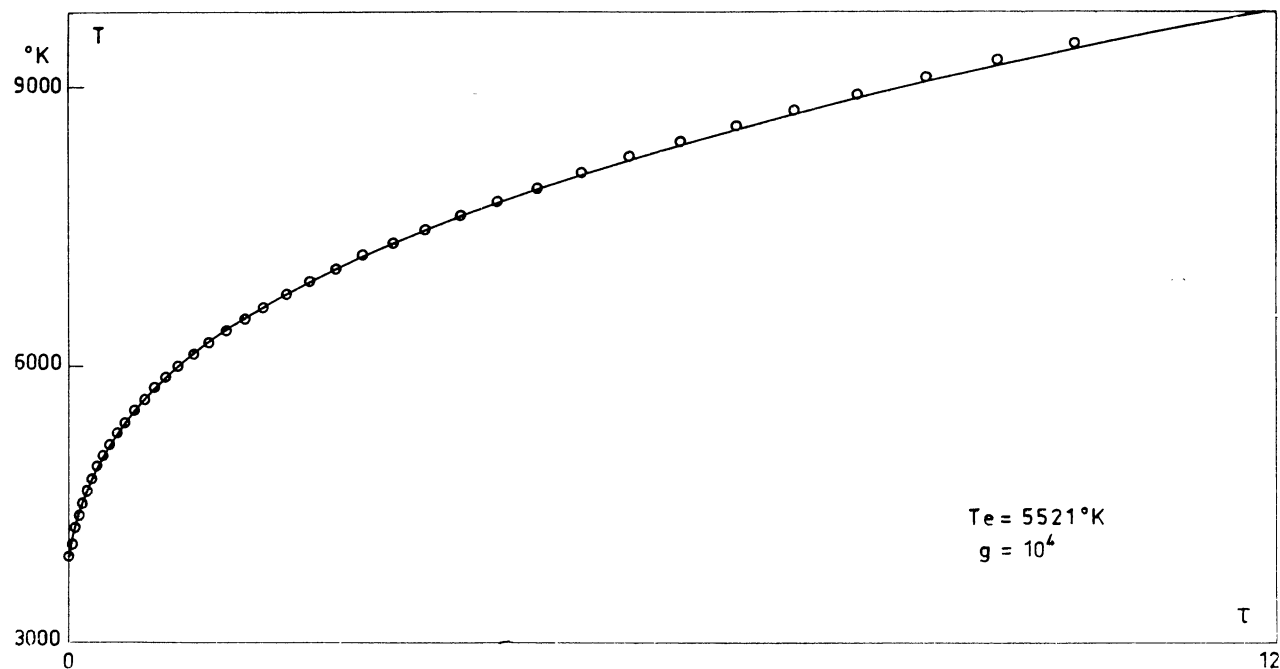


FIG. 2. — Comparaison de deux modèles de même température effective :

courbe continue : $\tau_p = 20$,
cercles : $\tau_p = 10$.

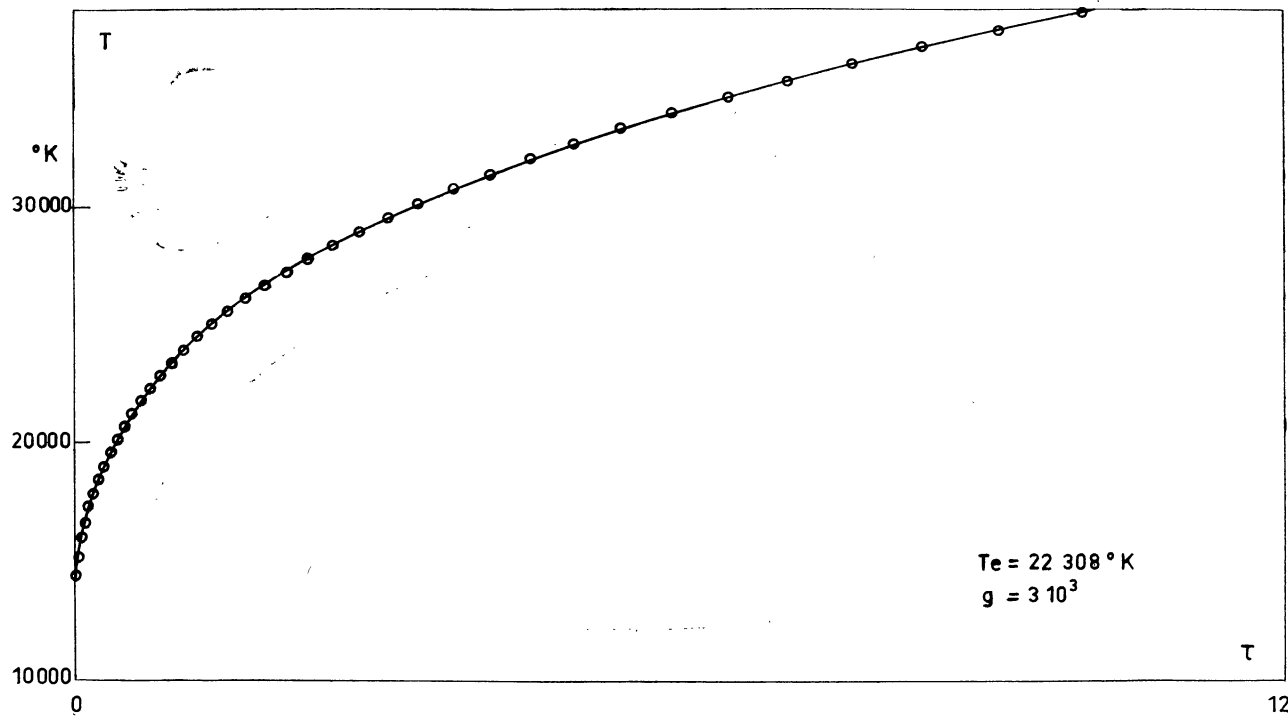


FIG. 3. — Comparaison de deux modèles de même température effective :

courbe continue : $p = 80$,
cercles : $p = 40$.

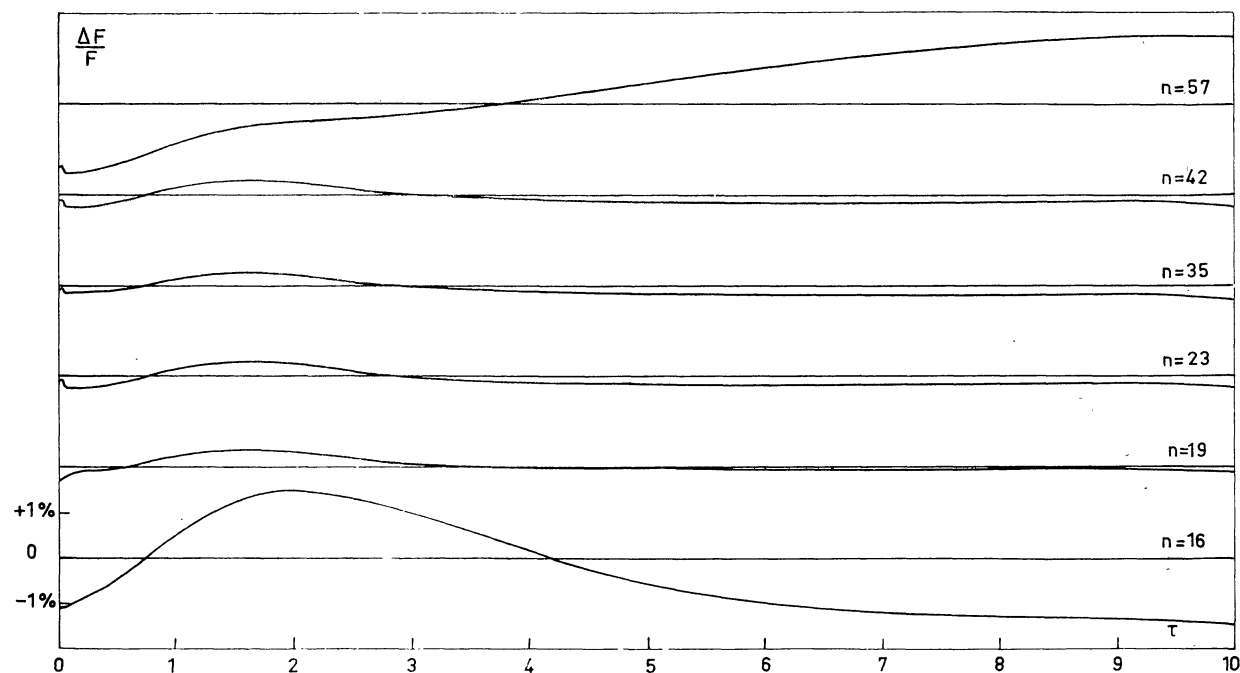


FIG. 4. — Erreur relative sur le flux en fonction du nombre de fréquences utilisées :
 $T_e = 11\,954\text{ }^\circ\text{K}$, $g = 10^4$.

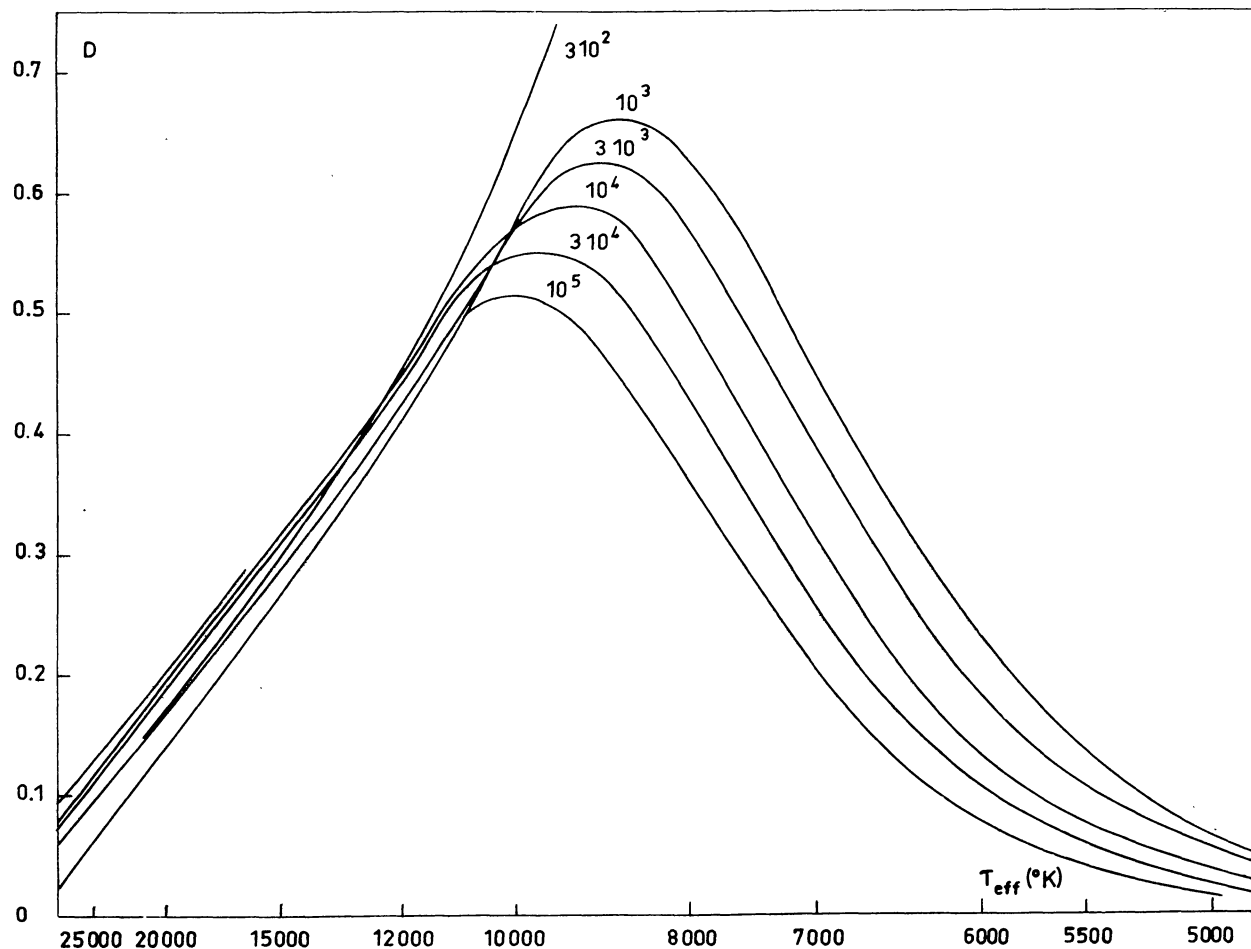


FIG. 5. — Variation de la discontinuité de Balmer en fonction de la température effective. Le chiffre porté sur chaque courbe est la valeur de g . L'abscisse est proportionnelle à $\theta_{\text{eff}} = 11605.9\ T_{\text{eff}}$.

- le nombre m de faisceaux dans la formule (IV.8)
- le nombre p de points de division en τ
- la profondeur optique du fond du modèle τ_p
- un paramètre ε fixant la précision du calcul de p et p_e .

Pour étudier l'influence de ces paramètres, chaque modèle obtenu par le processus précédent a été vérifié en calculant l'ensemble de son spectre avec des valeurs des paramètres ci-dessus définissant une précision bien supérieure.

Les valeurs choisies pour les paramètres m ($m = 2$), p ($p = 40$), et τ_p ($\tau_p = 10$) se sont montrées bien suffisantes pour assurer une précision correcte sur le flux total. La figure (2) superpose la relation $T(\bar{\tau})$ pour deux modèles dont tous les paramètres sont identiques, sauf τ_p qui est égal soit à 10 (courbe représentée par des cercles) soit à 20 (courbe en trait continu). La superposition est parfaite, surtout au voisinage de la surface.

De même la figure (3) superpose les 2 relations $T(\bar{\tau})$ obtenues avec $p = 40$ (cercles) et $p = 80$ (courbe continue).

Le seul paramètre affectant gravement la précision est le paramètre n . La figure (4) montre le flux recalculé pour un même modèle pour diverses valeurs de n . Ce modèle a été calculé pour $T_{\text{eff}} = 11959$ °K, $g = 10^4$, $n = 23$. L'erreur maximum sur le flux recalculé est donnée en fonction de n par le tableau I.

TABLEAU I

n	$\Delta F/F$
16	2,9 %
19	0,73 %
23	0,52 %
35	0,57 %
42	0,58 %
57	3,10 %

On voit que cette erreur, grande pour les faibles valeurs de n , passe par un minimum lorsque n est égal à la valeur utilisée pour l'établissement du modèle et croît ensuite lentement. Pour $n = 57$, la grande valeur de $\Delta F/F$ s'explique par le fait que la liste des fréquences utilisées contient une valeur située au delà de la limite du continu du niveau fondamental de l'hélium neutre.

Dans ce domaine de température, le coefficient d'absorption correspondant est très grand. La correction de température nécessaire pour rétablir

la constance du flux est alors très faible en dehors d'un voisinage immédiat de la surface, zone qui n'a d'ailleurs que peu d'influence sur le spectre continu visible.

5.2 Caractéristiques des Modèles obtenus.

Le réseau construit correspond aux abondances données dans le tableau II.

TABLEAU II

ATOME	$\text{Log}_{10} N_A$
H	8
He	7
K70
Na	2.30
Al	2.20
Ca	2.15
Cs	1.36
Ti68
Mn90
Ni	1.91
Mg	3.40
Fe	2.57
Si	3.60
S	3.17
C	4.56
O	5.00
N	3.98
Ne	4.67

Ces abondances correspondent à celles adoptées par VARDYA (1961).

L'absorption continue due à ces « métaux » a été négligée dans ce premier travail ; ceux-ci n'interviennent que dans le calcul de la pression électronique.

5.21. *Critères spectraux.* — Nous avons calculé pour ces modèles la discontinuité de Balmer et les gradients visibles et ultraviolets. Le calcul du paramètre λ_1 de la classification IAP et celui des indices de couleur U — B et B — V fera l'objet d'un travail ultérieur.

Suivant la méthode utilisée à l'Institut d'Astrophysique de Paris (voir CHALONGE et DIVAN. (1952)), le flux émergeant au voisinage de la discontinuité de Balmer a été représenté par les formules :

$$\log_{10} F(\nu) = A_b + \frac{B_b}{\lambda} \quad \text{pour} \quad \lambda > 0,37\mu,$$

$$\log_{10} F(\nu) = A_{uv} + \frac{B_{uv}}{\lambda} \quad \text{pour} \quad \lambda < 0,37\mu.$$

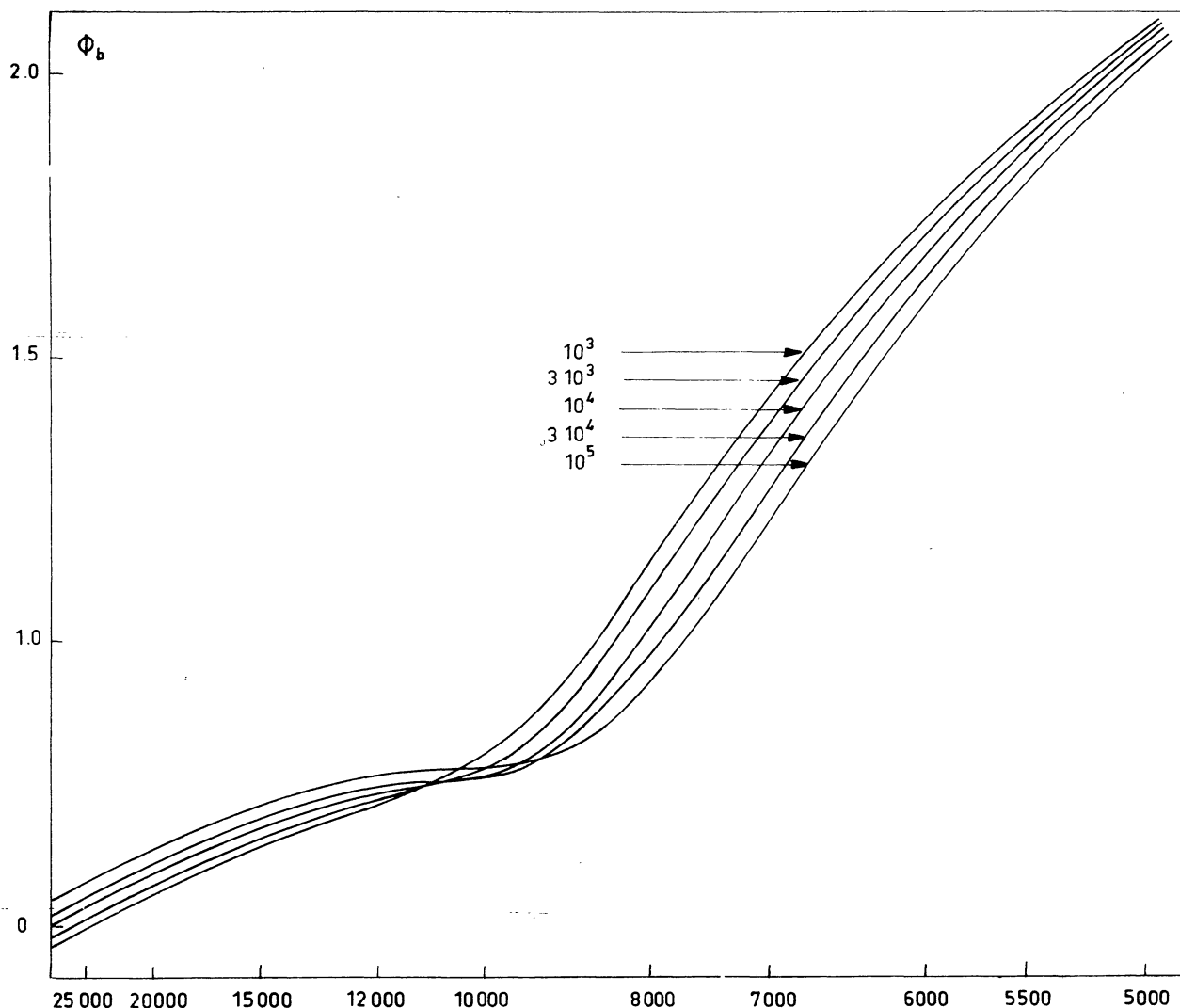


FIG. 6. — Variation du gradient visible en fonction de la température effective.

Les quatre coefficients inconnus sont déterminés par la méthode des moindres carrés. Les gradients sont alors définis par :

$$\varphi_b = -2.30 B_b + 1.11,$$

$$\varphi_{uv} = -2.30 B_{uv} + 1.11.$$

et la discontinuité de Balmer par :

$$D = A_b - A_{uv} + 2.70(B_b - B_{uv}).$$

Les figures 5, 6 et 7 donnent les courbes obtenues lorsque l'on porte les paramètres D , φ_b et φ_{uv} en fonction de $\theta_{\text{eff}} = \frac{11\,605.9}{T_{\text{eff}}}$ à g constant pour les 5 valeurs de g : 10^3 , $3 \cdot 10^3$, 10^4 , $3 \cdot 10^4$ et 10^5 .

Nous donnons également les courbes obtenues en portant D en fonction de φ_b et de φ_{uv} respective-

ment (figures 8 et 9). Ces courbes peuvent être directement comparées aux valeurs de CHALONGE et DIVAN (1952). On constate que l'accord est bon pour la courbe (D , φ_{uv}) mais mauvais pour la courbe (D , φ_b).

Ceci peut s'expliquer de plusieurs façons différentes :

— *a*) le gradient φ_b , formé dans une région où le coefficient d'absorption de H est faible, est plus sensible que φ_{uv} à l'abondance des « métaux » à basse température, et à l'abondance de l'hélium à haute température.

— *b*) le gradient φ_b peut être influencé par la présence des raies de Balmer, qui ne peuvent qu'accroître sa valeur.

— *c*) les gradients ne sont pas mesurés direc-

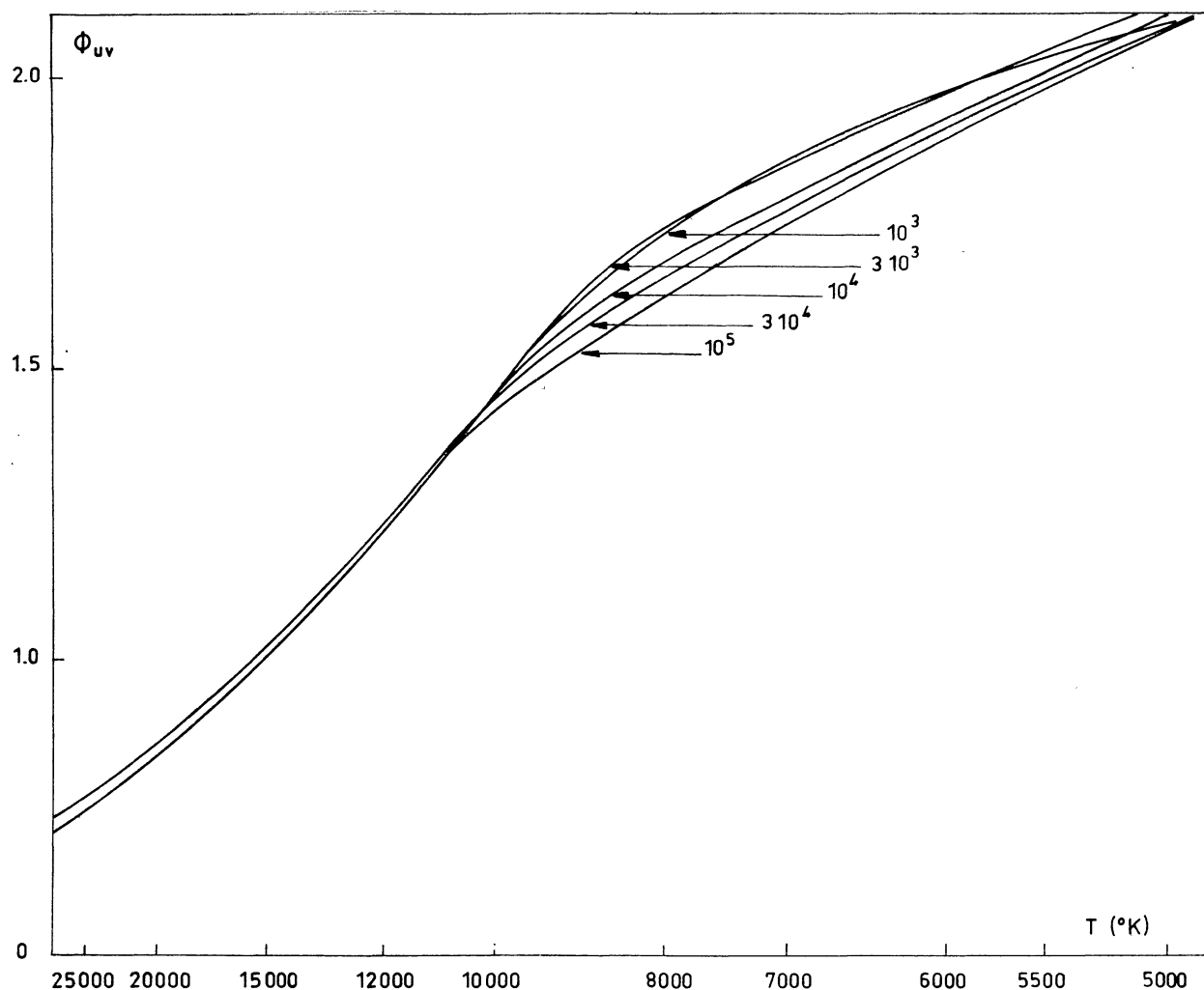


FIG. 7. — Variation du gradient ultraviolet en fonction de la température effective.

tement, mais par comparaison au continu de l'étoile S Monocerotis. Cette opération fournit en principe la différence $\varphi^* - \varphi_{\text{Mono}}$, mais comme le gradient est calculé sur un assez grand domaine spectral, le gradient théorique peut être assez différent du gradient mesuré. En fait, nous avons pu vérifier, en remplaçant le continu de S Monocerotis par celui d'un corps noir à la même température de couleur (25000 °K) que l'on obtient des gradients supérieurs de 0.06 à 0.11 unités à ceux calculés directement. Cependant, la correction précise de cet effet nécessite la connaissance du continu de S Monocerotis.

Par contre, φ_{uv} étant déterminé sur un intervalle spectral beaucoup plus étroit, est beaucoup moins sensible à cet effet.

— d) Enfin, les mesures utilisées sont essentiellement des mesures relatives, l'échelle absolue étant fixée uniquement par la mesure, très difficile, des

gradients de S Monocerotis. Il n'est donc pas impossible qu'une translation globale doive être appliquée aux mesures de CHALONGE et DIVAN. Les gradients de S Monocerotis, en effet, ne sont connus qu'à 10 % près environ.

Comme le gradient φ_{uv} semble être un critère de température presque pur, nous l'avons utilisé pour calibrer les observations de CHALONGE et DIVAN en température. Pour les étoiles plus chaudes que B5, nous avons également tenu compte des indications fournies par la discontinuité de Balmer, qui est, dans cette région, peu sensible à la gravité et dont la variation avec T_{eff} est plus régulière que celle de φ_{uv} . Les mesures de CHALONGE et DIVAN et le résultat de cette calibration, sont donnés dans le tableau III.

5.22. *Structure des modèles.* — Pour caracté-

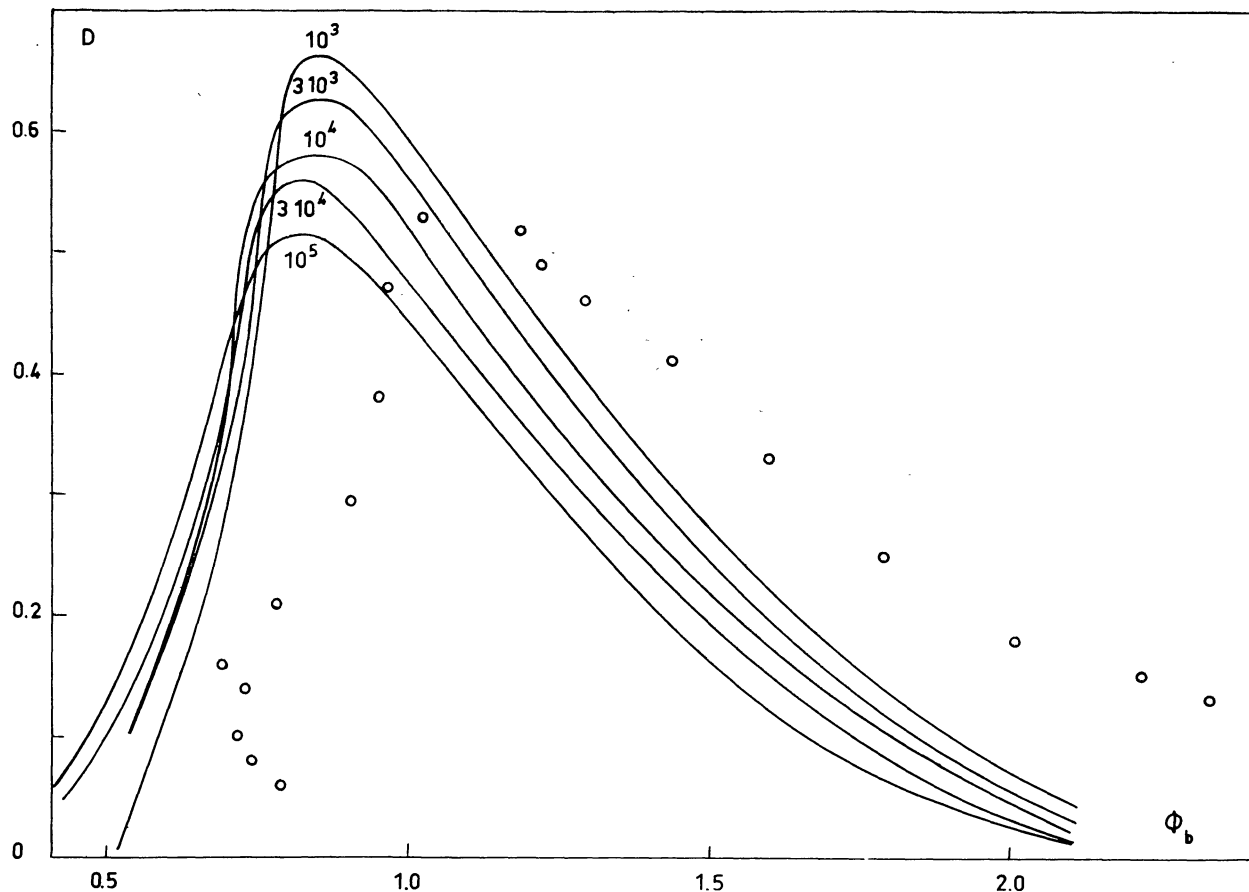


Fig. 8. — Les courbes iso- g dans le plan (D, Φ_b) . Les cercles représentent la séquence principale selon Chalange et Divan (1952).

TABLEAU III

TYPE SPECTRAL	Φ_b	Φ_{uv}	D	T_{eff}
O9	0,79	0,64	0,06	—
B0	0,74	0,76	0,08	27 600
B1	0,72	0,73	0,10	26 300
B2	0,73	0,77	0,14	24 000
B2,5	0,69	0,76	0,16	22 500
B3	0,78	0,82	0,21	20 000
B5	0,90	1,07	0,29	15 000
B8	0,95	1,14	0,38	13 200
B9	0,96	1,40	0,47	10 250
A0	1,03	1,45	0,51	9 800
A1	1,02	1,57	0,53	8 600
A2	—	—	0,52	—
A3	1,22	1,61	0,49	8 250
A5	1,29	1,63	0,46	8 000
A7	1,44	1,77	0,41	6 850
F0	1,60	1,90	0,33	6 000
F2	—	—	0,25	—
F5	2,01	1,98	0,18	5 500
F6	2,21	1,99	0,15	5 450
F8	2,33	2,04	0,13	5 250

ser les écarts au cas gris de nos modèles, nous avons utilisé le paramètre τ_{eff} , profondeur optique moyenne à laquelle la température est égale à la température effective. Ce paramètre est en effet mieux défini que le rapport T_0/T_{eff} , et moins sensible à des facteurs secondaires, comme l'omission du continu de Lyman. La figure (10) donne les courbes de variation du paramètre τ_{eff} en fonction de la température, pour diverses valeurs de g . Nous avons indiqué les températures auxquelles la fonction de Planck atteint son maximum pour la fréquence d'une discontinuité du coefficient d'absorption de l'hydrogène, ainsi que la valeur, constante, qui correspond au cas gris.

5. 3 Conclusion.

Il nous paraît, pour terminer, intéressant de comparer les résultats de ce travail aux recherches du groupe animé par Max KROOK (AVRETT et KROOK (1963), MIHALAS (1965)). Ces recherches ont abouti à la mise au point d'une méthode variationnelle pour le calcul de modèles en équilibre, méthode très différente de la nôtre, puisqu'elle part de la formulation intégrale du problème.

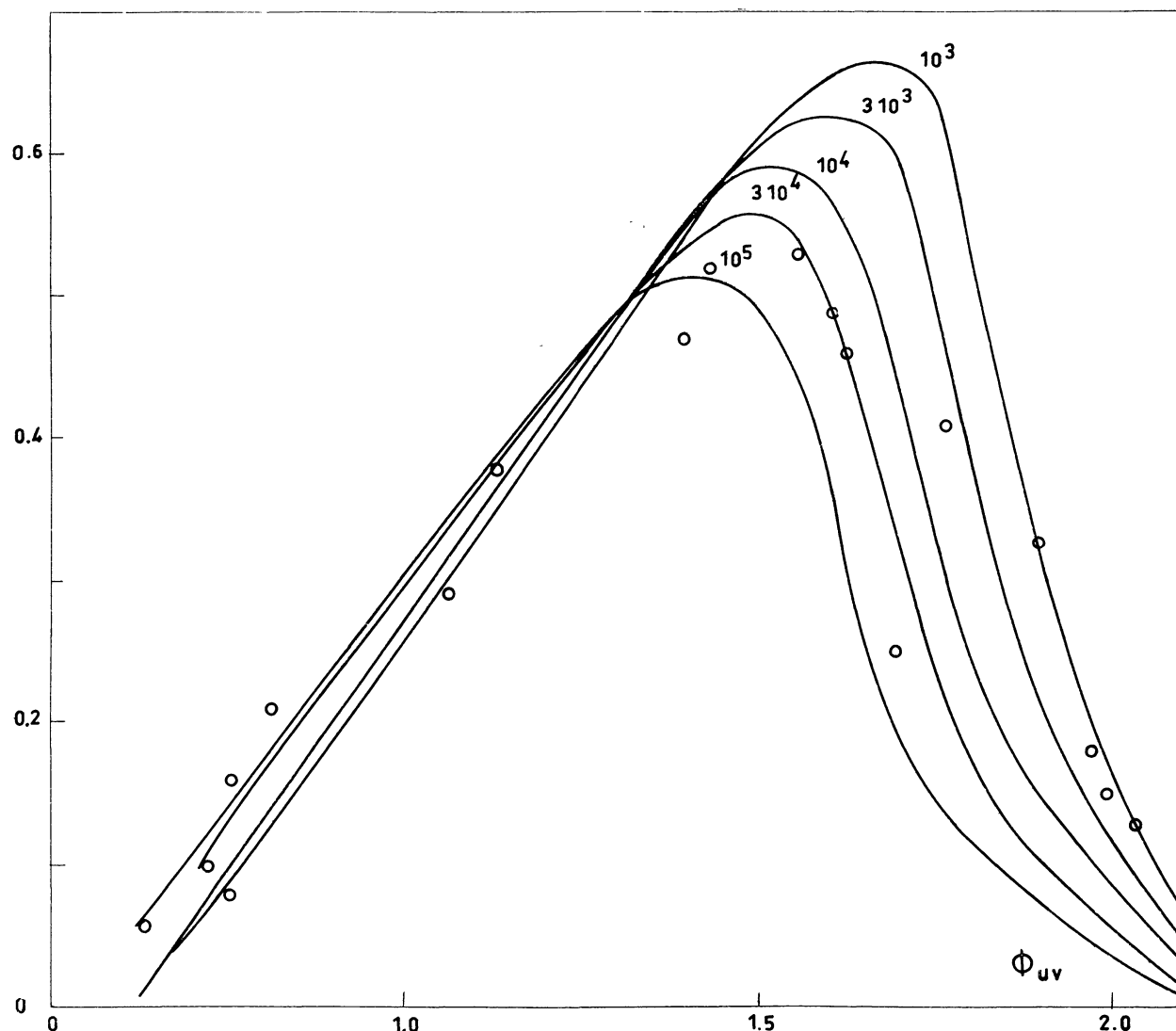


FIG. 9. — Les courbes iso- g dans le plan (D, Φ_{uv}) . Les cercles représentent la séquence principale selon Chalange et Divan (1952).

Une comparaison des modèles calculés par les deux méthodes montre que les résultats sont très voisins, les légères différences restantes pouvant être attribuées à des différences dans les valeurs numériques des abondances ou des coefficients d'absorption. La précision obtenue sur la constance du flux est comparable pour les deux méthodes.

Il serait intéressant de pouvoir comparer les temps de calcul de chaque méthode, mais ceci nécessiterait l'existence des programmes correspondants pour un même type de calculateur. Cependant, on peut voir que, si n est le nombre de points utilisés pour l'approximation des intégrales :

$$\int f(v) dv,$$

dans notre méthode, le temps de calcul est propor-

tionnel à n^3 , et seulement à n pour la méthode Avrett-Krook. Cette dernière est donc supérieure lorsque n est grand. Par contre, si p est le nombre de couches du modèle, notre temps de calcul est proportionnel à p , celui de la méthode Avrett-Krook à p^2 ; notre méthode est donc supérieure pour les grandes valeurs de p .

Une autre méthode de résolution des équations de transfert linéarisés du même type que (IV.4) a été proposée par RYBICKI (1965), HUMMER et RYBICKI (1966). Cette méthode introduit la matrice S de réflexion diffuse, définie par exemple par CHANDRASEKHAR (1960). On peut montrer que si le pas : $\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k$ est petit, on a :

$$R_k = 1 + \Delta\tau S_k,$$

R_k étant la matrice auxiliaire définie par (IV.9), et

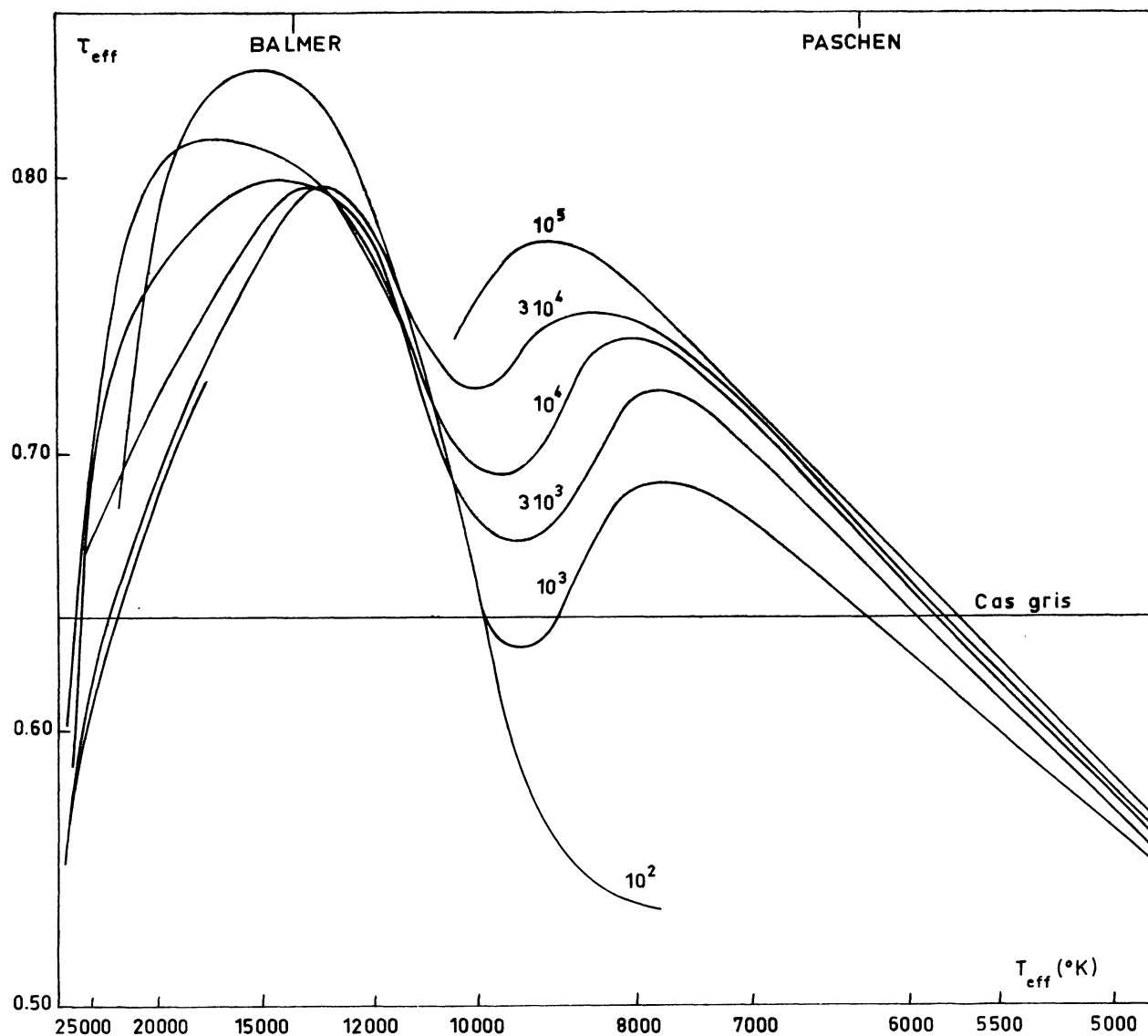


FIG. 10. — Variation de τ_{eff} en fonction de la température effective.

que, de ce point de vue, les deux méthodes sont équivalentes. Mais il n'est pas certain que le comportement des deux méthodes soit le même quand $\Delta\tau$ n'est pas petit, comme cela se présente pour le calcul d'un modèle, quand le coefficient x_i devient très grand (calcul du continuum de Lyman, par exemple).

Une comparaison plus détaillée devra attendre

que la méthode de Rybicki ait été appliquée à des problèmes analogues à ceux que nous avons étudiés.

Que tous ceux qui ont bien voulu nous aider au cours de ces recherches et en particulier, Yvette CUNY et Françoise PRADERIE, du Service d'Astrophysique Générale de l'Observatoire de Meudon, et Michel SCHNEIDER de l'Institut d'Astrophysique de Paris, trouvent ici nos remerciements.

BIBLIOGRAPHIE

- AVRETT E., KROOK M., 1963, *Ap. J.*, **137**, 874.
 BÖTTICHER W., 1958, *Zs. F. Ap.*, **150**, 336.
 CHALONGE D., et DIVAN L., 1952, *Ann. Ast.*, **15**, 201.
 CHANDRASEKHAR S., 1960, *Radiative Transfer*. Dover, New York.
 CUNY Y., 1967, *Ann. Ap.* **30**, 2.

- FEAUTRIER P., 1962, DES, Paris.
 FEAUTRIER P., 1964, *Cr. Acad. Sci. Paris*, **258**, 3189.
 FEAUTRIER P., 1967, *Ann. Ast.*, à paraître.
 FOX L., *The Numerical Solution of two points boundary Problems in Ordinary differential equation*, Clarendon, Press Oxford, 1957.

- GELTMANN S., 1962, *Ap. J.*, **136**, 935.
 GINGERICH O., 1965, Rich, Communication at the
 120th Meeting of the AAS, Berkeley.
 HUANG S. S., 1948, *Ap. J.*, **108**, 354.
 HUMMER D. G., RYBICKI G. B., 1966, *JQSRT*, **6**, 661.
 JOHN T. L., 1966, *M. N.*, **131**, 315.
 MENZEL D. H., PEKERIS C. L. 1935, *M. N.*, **96**, 77.
 MIHALAS D., 1965, *Ap. J.* Supplément séries, N° 92.
 Modern Computing Methods, H. M. Stationery Office,
 Londres, 1962.
 PEACH G., 1962, *M. N.*, **124**, 371.
 PECKER J. C., 1965, Annual Review of Astronomy and
 Astrophysics.
 PRADERIE F., 1964, *Ann. Ast.*, **27**, 129.
 RYBICKI G. B., 1965, Proceedings of the second
 Harvard-Smithsonian Conference on Stellar Atmos-
 pheres, p, 140,
 VARDYA M. S., 1961, *Ap. J.*, 133, 107.
 WACHPRESS E. L., in Mathematical Methods for digital
 computers, Ralston A., Willy H. S., ed., 1962.
 WRUBEL M. H., Star Evolution, Enrico Fermi Inter-
 national School of Physics, Course 28, Gratton L.,
 ed, 1962.