

---

**TD 08 –  $\mathcal{NP}$ -Complétude**

---

Pour ce TD, vous pourrez supposer que les problèmes **SAT**, **3-SAT**, **Clique** et **Vertex-Cover** sont NP-Complets.

**Exercice 1.***Questions de cours*

Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux problèmes de décision, et supposons qu'on connaisse une transformation polynomiale (une réduction) de  $P_1$  en  $P_2$ . Répondre aux sept questions suivantes avec un maximum de deux lignes de justification par question.

1. Si  $P_1 \in P$ , a-t-on  $P_2 \in P$  ?
2. Si  $P_2 \in P$ , a-t-on  $P_1 \in P$  ?
3. Si  $P_1$  est NP-complet,  $P_2$  est-il NP-complet ?
4. Si  $P_2$  est NP-complet,  $P_1$  est-il NP-complet ?
5. Si on connaît une transformation polynomiale de  $P_2$  en  $P_1$ ,  $P_1$  et  $P_2$  sont-ils NP-complets ?
6. Si  $P_1$  et  $P_2$  sont NP-complets, existe-t-il une transformation polynomiale de  $P_2$  en  $P_1$  ?
7. Si  $P_1 \in NP$ ,  $P_2$  est-il NP-complet ?

**Exercice 2.***Variante de 3-SAT*

Montrer la  $\mathcal{NP}$ -complétude des deux variantes de 3-SAT suivantes :

1. **3-SAT NAE** (*not all equal*), où l'on impose que les trois littéraux de chaque clause ne soient pas tous à la même valeur.
2. **3-SAT OIT** (*one in three*), où l'on impose qu'exactement un littéral soit à VRAI dans chaque clause.

**Exercice 3.***Dominateur*

1. Étant donné un graphe  $G = (V, E)$  et un entier  $K \geq 3$ , déterminer si  $G$  contient un dominateur de cardinal  $K$ , i.e. un sous-ensemble  $D \subset V$  de cardinal  $K$  tel que pour tout sommet  $u \in V \setminus D$ , il existe  $v \in D$  avec  $(u, v) \in E$