

---

**TD 09 – Plus de réductions :)** 


---

**Exercice 1.**

SUBSET-SUM

Montrer que le problème suivant SUBSET-SUM est  $\mathcal{NP}$ -complet.

**SUBSET-SUM**

*Instance* : un ensemble fini  $S$  d'entiers positifs et un entier objectif  $t$ .

*Question* : existe-t-il un sous-ensemble  $S' \subseteq S$  tel que  $\sum_{x \in S'} x = t$  ?

*Indication* : vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. A partir d'un ensemble de clauses  $C_0, \dots, C_{m-1}$  sur les variables  $x_0, \dots, x_{n-1}$ , considérer  $S$  l'ensemble des entiers  $v_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij}10^j$  et  $v'_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b'_{ij}10^j$ ,  $0 \leq i \leq n-1$ , où  $b_{ij}$  (resp.  $b'_{ij}$ ) vaut 1 si le littéral  $x_i$  (resp.  $\bar{x}_i$ ) apparaît dans  $C_j$  et 0 sinon, et des entiers  $s_j = 10^j$  et  $s'_j = 2 \cdot 10^j$ ,  $0 \leq j \leq m-1$ . Trouver alors un entier objectif  $t$  tel qu'il existe un sous-ensemble  $S' \subseteq S$  de somme  $t$  si et seulement si l'ensemble initial de clauses est satisfiable. Conclure. Quels autres entiers auraient aussi marché ?

**Exercice 2.** *$\mathcal{NP}$ -complétude de 2-partition*

On définit le problème de décision 2-Partition ainsi : soit  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  des entiers, existe-t-il  $I \subset S$  tel que  $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$  ?

1. Montrer que 2-Partition est NP-complet.

**Exercice 3.***Chemin avec paires interdites*

1. Soient  $G = (V, E)$  un graphe orienté (on distingue l'arc  $(u, v)$  de l'arc  $(v, u)$ ), deux sommets de ce graphe  $s, t \in V$  et une liste  $P = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$  de paires de sommets de  $G$ . Existe-t-il un chemin orienté de  $s$  vers  $t$  dans  $G$  qui contient au plus un sommet de chaque paire de la liste  $P$  ?

*Indication* : faire une réduction à partir de 3-SAT.

**Exercice 4.***Clique pour graphe régulier*

1. Soient  $G = (V, E)$  un graphe dont tous les sommets sont de même degré, et  $k \geq 1$  un entier. Existe-t-il une clique de taille supérieure ou égale à  $k$  ?