TD 10 – Approximations et NP-complétude

Exercice 1. *Le plus long exo de l'année*

On rappelle quelques définitions :

— Dans un graphe $G = (V, E)$, un *ensemble indépendant* est un sous-ensemble de sommets V' non reliés par des arêtes (si $u \in V'$ et $v \in V'$, alors $(u, v) \notin E$).

— Dans un graphe $G = (V, E)$ connexe, un *ensemble dominant* est un sous-ensemble de sommets V' tel que tout sommet de $V \setminus V'$ est adjacent à un sommet de V'. On note $dom(G)$ le cardinal minimal d'un ensemble dominant.

1. Montrer que trouver un ensemble indépendant de cardinal maximal est NP-difficile.

2. Montrer que trouver un ensemble dominant de cardinal minimal $dom(G)$ est NP-difficile.

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, complet, dont les arêtes sont pondérées par une fonction de poids w qui vérifie l'inégalité triangulaire : $w(u, v) \leq w(u, w) + w(w, v)$ pour tout triplet de sommets (u, v, w). Soit aussi un entier $k \geq 1$.

Pour tout $S \subset V$ et tout $v \in V \setminus S$, on définit $connect(v, S)$ comme le poids minimal d'une arête reliant v à un sommet de S : $connect(v, S) = \min_{s \in S}\{w(v, s)\}$. Le problème est de trouver un k-centre, c'est à dire un sous-ensemble S de cardinal k et tel que $center(S) = \max_{v \in V \setminus S}\{connect(v, S)\}$ soit minimal.

3. À quoi peut bien servir de déterminer un k-centre (donner un exemple d'application) ?

4. Montrer que trouver un k-centre est NP-difficile.

On va chercher une 2-approximation, i.e. un S de cardinal k tel que $center(S) \leq 2 \cdot OPT$, où $OPT = \min_{S \subset V, |S|=k}\{center(S)\}$.

On ordonne les arêtes de E par poids croissant : $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$, où $m = |E|$. On pose $G_i = (V, E_i)$ où $E_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ est l'ensemble des i premières arêtes.

5. Montrer que résoudre le problème du k-centre revient à trouver le plus petit indice i tel que G_i a un ensemble dominant de cardinal au plus k.

Une dernière définition : le carré d'un graphe $G = (V, E)$, noté $G^{(2)} = (V, E^{(2)})$, contient les chemins de longueur au plus deux : $(u, v) \in E^{(2)}$ si $(u, v) \in E$ ou s'il existe $w \in V$ tel que $(u, w) \in E$ et $(w, v) \in E$.

6. Étant donné un graphe H, soit I un ensemble indépendant du graphe carré $H^{(2)}$. Montrer que $|I| \leq dom(H)$.

7.
L'algorithme d'approximation du k-centre est le suivant :

début
- Construire $G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, \ldots, G_m^{(2)}$;
- Trouver de manière gloutonne un ensemble indépendant inextensible (auquel on ne peut pas rajouter des sommets) M_i dans chaque graphe $G_i^{(2)}$;
- Trouver le plus petit indice i tel que $|M_i| \leq k$, soit j cet indice;
- **retourner** M_j;

(a) Montrer que $w(e_j) \leq OPT$.

(b) Montrer que l'algorithme est bien une 2-approximation.

8. Montrer que la borne 2 est stricte : donner un exemple de graphe où l'algorithme réalise effectivement une 2-approximation.

9. Montrer que si $P \neq NP$, il n'existe pas de $(2 - \varepsilon)$-approximation au problème du k-centre, pour tout $\varepsilon > 0$.