# TD 13 – Examen de l'an dernier

Tous les exercices sont indépendants. Enjoy and good luck !

**Exercice 1.** *Tâches et profits*

On a un seul processeur et $n$ tâches indépendantes. Chaque tâche $T_i$ a une durée $a_i$ et une date d'échéance $d_i$ (deadline). Si $T_i$ est ordonnancée pour terminer son exécution au plus tard au temps $d_i$, elle rapporte un profit $p_i$, sinon elle rapporte 0. Etant donné une valeur $P$ cible, peut-on trouver un ordonnancement de profit total (somme des profits des tâches) au moins $P$ ?

1. Montrer que ce problème est NP-complet.

**Exercice 2.** *Pièces de monnaies*

On revient sur le problème de réaliser une somme S avec le minimum de pièces de valeurs données.

1. Donner un exemple qui montre que le rapport entre le nombre de pièces utilisé par l'algorithme glouton et le nombre de pièces optimal peut être arbitrairement grand.

**Exercice 3.** *Remplissage d'une urne*

On a $n$ poids entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ et une (unique) urne de capacité $B$, et on veut trouver le sous-ensemble $\mathcal{I}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$ de poids $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i$ maximal mais inférieur ou égal à $B$.

1. Montrer que le problème de décision associé est NP-complet.

2. Donner un algorithme glouton et dire s'il réalise une approximation ; si oui, laquelle.

**Exercice 4.** *Chemin et circuit hamiltoniens*

On définit les problèmes suivants :

— HAMCYCLE : étant donné un graphe $G = (V, E)$ (non orienté), existe-t-il un cycle de $G$ qui visite tous les sommets de $V$ une fois et une seule ?

— HAMPATH : étant donné un graphe $G = (V, E)$ (non orienté), et deux sommets $s$ et $t$ de $V$, existe-t-il un chemin de $G$ entre $s$ et $t$ qui visite tous les sommets de $V$ une fois et une seule.

1. On suppose que HAMCYCLE est NP-complet. Montrer que HAMPATH est NP-complet par réduction à partir de HAMCYCLE.

2. On suppose que HAMPATH est NP-complet. Montrer que HAMCYCLE est NP-complet par réduction à partir de HAMPATH.

**Exercice 5.** *Polynomial ou NP-complet ?*

Pour chacun des trois problèmes suivants, donner un algorithme polynomial, ou montrer la NP-complétude (et dire si c'est au sens faible ou au sens fort) :

NPART2 Etant donné $2n$ entiers strictement positifs et non nécessairement distincts $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2n}\}$ de somme $t \times n$, trouver une partition de $A$ en $n$ paires chacune de somme $t$

NPARDTQ Etant donné $2n$ entiers strictement positifs et tous distincts $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2n}\}$ de somme $t \times n$, trouver une partition de $A$ en $n$ sous-ensembles de taille quelconque et chacun de somme $t$

NPARTQ Etant donné $2n$ entiers strictement positifs et non nécessairement distincts $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2n}\}$ de somme $t \times n$, trouver une partition de $A$ en $n$ sous-ensembles de taille quelconque et chacun de somme $t$

**Exercice 6.** *Coloriage*

On a un graphe complet à $n$ sommets dont toutes les arêtes sont pondérées. On a $k$ couleurs numérotées $\{1, 2, \dots, k\}$ et on assigne une couleur à chaque sommet. Le poids total $PT(i)$ d'une couleur est la somme des poids des arêtes reliant deux sommets de couleur $i$. Le poids total d'un coloriage est le maximum des $PT(i)$ pour $1 \leq i \leq k$.

1. Monter que trouver un coloriage de poids total inférieur à une borne donnée $K$ est un problème NP-complet.