

---

**TD 07 – Partiel de l’an dernier**


---

**Exercice 1.***Stations d’essence*

Bob roule sur l’autoroute en voiture. Il part de Lyon (kilomètre 0) avec le plein d’essence et va à Tombouctou. La  $i$ -ème station-service est au kilomètre  $k_i$ . Son autonomie (plein d’essence) est de  $d$  kilomètres.

1. Quel est son algorithme pour minimiser le nombre d’arrêts pour faire le plein ?

**Exercice 2.***Complexité*

On considère un ensemble  $S$  de  $n \geq 2$  entiers distincts ( $S$  n’est pas supposé trié) :

1. Proposer un algorithme en  $O(n)$  pour trouver deux éléments  $x$  et  $y$  de  $S$  tels que  $|x - y| \geq |u - v|$  pour tout  $u, v \in S$ .
2. Proposer un algorithme en  $O(n \log n)$  pour trouver deux éléments  $x$  et  $y$  de  $S$  tels que  $x \neq y$  et  $|x - y| \leq |u - v|$  pour tout  $u, v \in S, u \neq v$ .
3. Soit  $m$  un entier arbitraire (non nécessairement élément de  $S$ ). Proposer un algorithme en  $O(n \log n)$  pour déterminer s’il existe deux éléments  $x$  et  $y$  de  $S$  tels que  $m = x + y$ .
4. **(difficile)** Proposer un algorithme en  $O(n)$  pour trouver deux éléments distincts  $x$  et  $y$  de  $S$  tels que  $|x - y| \leq \frac{1}{n-1}(\max(S) - \min(S))$ .

**Exercice 3.***Analyse du cours d’actions*

On regarde le cours passé d’une action pendant  $n$  jours consécutifs et on se demande quel profit on aurait pu faire. Autrement dit, étant donnés  $n$  nombres  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ou  $p_i$  est le cours de l’action au  $i$ -ème jour, on veut trouver  $M = \max_{1 \leq i < j \leq n} (p_j - p_i)$  (acheter le jour  $i$ , revendre le jour  $j$  ultérieur), ou renvoyer 0 si  $M < 0$  (pas de profit possible).

1. Donner un algorithme diviser-pour-régner de coût  $O(n \log n)$ .
2. Donner un algorithme de coût  $O(n)$ .

**Exercice 4.***Plus grand palindrome*

On a une chaîne de caractères  $s_1 s_2 \dots s_n$  et on veut trouver la longueur de la plus longue sous-chaîne (un segment  $s_i s_{i+1} \dots s_j$  de caractère consécutifs) qui soit un palindrome (un palindrome est identique quand on le lit de gauche à droite et de droite à gauche). Par exemple la chaîne *pokalomomolaemon* a une sous-chaîne palindrome de longueur 9, *alomomola*.

1. Donner un algorithme de coût au plus  $O(n^3)$ .
2. Donner un algorithme de coût  $O(n^2)$

**Exercice 5.***Recherche d’un élément dans une matrice*

On a une matrice carrée  $A = (a_{ij})$  d’ordre  $n$ . Les  $a_{ij}$  sont des entiers positifs. On suppose que toutes les lignes et toutes les colonnes de  $A$  sont croissantes (au sens large). On a enfin un entier  $x$  positif dont on veut savoir s’il existe dans la matrice.

1. Donner un algorithme de coût  $O(n^2)$
2. Donner un algorithme de coût  $O(n \log n)$
3. **(difficile)** Donner un algorithme de coût  $O(n)$

**Exercice 6.***Problème des cageots de fraises*

On s'intéresse (mais si!) à la distribution de  $n$  cageots de fraises dans  $p$  magasins. Le bénéfice que l'on peut retirer de chaque magasin est fonction du nombre de cageots fourni. Ainsi,  $b_j(i)$  représente le bénéfice que tire le magasin  $j$  de la vente de  $i$  cageots ( $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ ). On appelle *gains marginaux* les gains supplémentaires obtenus par cageot :

$g_j(i) = b_j(i) - b_j(i-1)$ , avec  $b_j(0) = 0$  (aucun bénéfice pour la vente de 0 cageot).

1. Si, pour chaque magasin  $j$ , la fonction de gains marginaux  $g_j$  est décroissante, proposer un algorithme pour répartir les cageots de fraises dans les magasins avec bénéfice maximal. Donner un contre-exemple si les gains marginaux ne sont pas décroissants.
2. **(difficile)** Proposer un algorithme qui calcule le bénéfice optimal dans le cas général. Quelle est sa complexité?