TD 09 – Plus de réductions

Exercice 1. *SUBSET-SUM*

Montrer que le problème suivant SUBSET-SUM est $\mathcal{NP}$-complet.

SUBSET-SUM
Instance : un ensemble fini S d'entiers positifs et un entier objectif t.
Question : existe-t-il un sous-ensemble $S' \subseteq S$ tel que $\sum_{x \in S'} x = t$?

Indication : vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. A partir d'un ensemble de clauses $C_0, ..., C_{m-1}$ sur les variables $x_0, ..., x_{n-1}$, considérer S l'ensemble des entiers $v_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij} 10^j$ et $v'_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b'_{ij} 10^j$, $0 \leq i \leq n-1$, où b_{ij} (resp. b'_{ij}) vaut 1 si le littéral x_i (resp. $\overline{x_i}$) apparaît dans C_j et 0 sinon, et des entiers $s_j = 10^j$ et $s'_j = 2.10^j$, $0 \leq j \leq m-1$. Trouver alors un entier objectif t tel qu'il existe un sous-ensemble $S' \subseteq S$ de somme t si et seulement si l'ensemble initial de clauses est satisfiable. Conclure. Quels autres entiers auraient aussi marché ?

Exercice 2. *$\mathcal{NP}$-complétude de 2-partition*

On définit le problème de décision 2-Partition ainsi : soit $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ des entiers, existe-t-il $I \subset S$ tel que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$?

1. Montrer que 2-Partition est NP-complet.

Exercice 3. *Dominateur*

1. Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un entier $K \geq 3$, déterminer si G contient un dominateur de cardinal K, i.e. un sous-ensemble $D \subset V$ de cardinal K tel que pour tout sommet $u \in V \setminus D$, il existe $v \in D$ avec $(u, v) \in E$

Exercice 4. *Chemin avec paires interdites*

1. Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté (on distingue l'arc (u,v) de l'arc (v,u)), deux sommets de ce graphe $s, t \in V$ et une liste $P = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ de paires de sommets de G. Existe-t-il un chemin orienté de s vers t dans G qui contient au plus un sommet de chaque paire de la liste P ?
   Indication : faire une réduction à partir de 3-SAT.