TD 06 – Paradigmes

Exercice 1. *Une bijection*

Les trois exercices suivants correspondent à trois paradigmes : glouton, diviser pour régner, programmation dynamique (mais ils ne sont pas cités dans le bon ordre...). Retrouver la bonne bijection.

Exercice 2. *Paradigme 1*

On regarde le cours passé d'une action pendant n jours consécutifs et on se demande quel profit on aurait pu faire. Autrement dit, étant donnés n nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$ ou p_i est le cours de l'action au i-ème jour, on veut trouver $M = \max_{1 \leq i < j \leq n} (p_j - p_i)$ (acheter le jour i, revendre le jour j ultérieur), ou renvoyer 0 si $M < 0$ (pas de profit possible).

1. Donner un algorithme de coût $O(n \log n)$.
2. Donner un algorithme de coût $O(n)$.

Exercice 3. *Paradigme 2*

On se donne n sous-ensembles $X_1, \dots, X_n$ de $[n]$. Une *couverture* est une collection de X_i dont l'union est $[n]$. La *densité* d'un ensemble non vide $Y \subseteq [n]$ est le maximum de $|Y \cap X_i|/|Y|$ pour $i = 1, \dots, n$.

1. Montrer que s'il existe un ensemble de densité $\varepsilon > 0$, alors toute couverture a une taille au moins $1/\varepsilon$.
2. A présent, si tous les ensembles Y ont une densité au moins $\varepsilon > 0$, montrer que l'on peut en temps polynomial trouver une couverture de taille $(\ln n)/\varepsilon$. (On rappelle que $\ln(1 + x) \leq x$).

Exercice 4. *Paradigme 3*

On dit qu'un tableau $C[1, \dots, m]$ est un *sous-tableau* d'un tableau $A[1, \dots, n]$ s'il existe une fonction strictement croissante f de $[m]$ dans $[n]$ telle que $C[i] = A[f(i)]$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Si de plus f est de la forme $f(i) = i + k$ pour une constante k, on dit que C est un *facteur* de A.

1. Proposer un algorithme en $O(n^2)$ qui admet en entrée deux tableaux A et B de taille n et retourne la longueur d'un plus grand facteur commun.
2. Même question pour sous-tableau commun. En déduire un algorithme qui calcule une plus longue sous-suite croissante dans un tableau d'entiers.
3. *(Difficile)* La généralisation directe à deux matrices A et B conduit à deux problèmes : plus grand bloc carré commun (lignes et colonnes consécutives) et plus grande sous-matrice carrée (lignes et colonnes pas forcément consécutives). Quelle est la complexité du problème problème ? Que pensez vous de la complexité du deuxième problème ?