

Analyse temps-fréquence et modèles d'invariance d'échelle : Contribution à l'étude de systèmes complexes

Paulo Gonçalves

Habilitation à Diriger des Recherches
École Normale Supérieure de Lyon, France

29 mars 2010

Plan des contributions

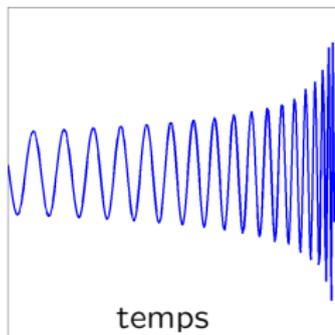
- 1 Représenter les signaux dans le plan temps-fréquence
- 2 Multirésolution et modèles d'invariance d'échelle
- 3 Systèmes complexes : non-stationnarités, lois d'échelle
 - Système cardiovasculaire
 - Réseaux de communication
- 4 Sciences de l'information et modèles bio-inspirés

Plan des contributions

- 1 Représenter les signaux dans le plan temps-fréquence
- 2 Multirésolution et modèles d'invariance d'échelle
- 3 Systèmes complexes : non-stationnarités, lois d'échelle
 - Système cardiovasculaire
 - Réseaux de communication
- 4 Sciences de l'information et modèles bio-inspirés

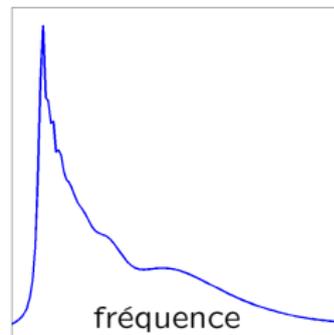
Représentation temporelle « ou » fréquentielle

s(temps) – Shannon



$$s(t) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_t \rangle$$

S(fréquence) – Fourier

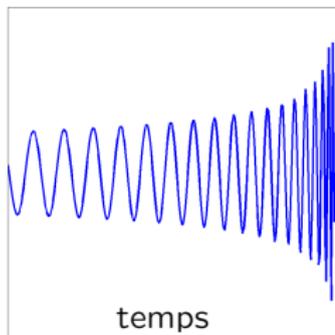


$$S(f) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_f \rangle$$

- représentations duales : localisation \leftrightarrow délocalisation
 - transformée de Fourier « mal adaptée » aux non-stationarités
- combiner les deux types d'information
 - associer à chaque composante fréquentielle une date d'existence (et réciproquement)
 - formellement on sait calculer la **fréquence instantanée** (et réciproquement le **retard de groupe**)

Représentation temporelle « ou » fréquentielle

s(temps) – Shannon



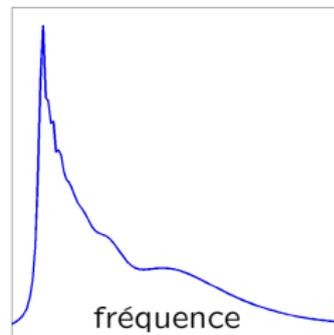
$$s(t) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_t \rangle$$

Transformée de
Fourier

$$s(t) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_{tf} \rangle$$

$$S(f) = \langle \mathcal{s}, \mathcal{e}_{tf} \rangle$$

S(fréquence) – Fourier

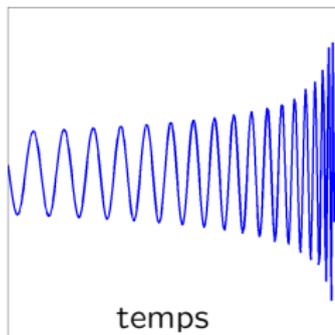


$$S(f) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_f \rangle$$

- représentations duales : localisation \leftrightarrow délocalisation
 - transformée de Fourier « mal adaptée » aux non-stationarités
- combiner les deux types d'information
 - associer à chaque composante fréquentielle une date d'existence (et réciproquement)
 - formellement on sait calculer la **fréquence instantanée** (et réciproquement le **retard de groupe**)

Représentation temporelle « ou » fréquentielle

s(temps) – Shannon



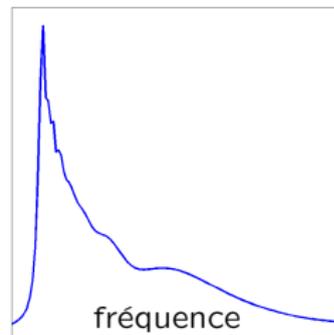
$$s(t) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_t \rangle$$

Transformée de
Fourier

$$s(t) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_{tf} \rangle$$

$$S(f) = \langle \mathcal{s}, \mathcal{e}_{tf} \rangle$$

S(fréquence) – Fourier

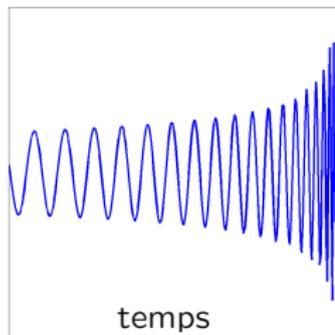


$$S(f) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_f \rangle$$

- représentations duales : localisation ↔ délocalisation
 - transformée de Fourier « mal adaptée » aux non-stationarités
- combiner les deux types d'information
 - associer à chaque composante fréquentielle une date d'existence (et réciproquement)
 - formellement on sait calculer la **fréquence instantanée** (et réciproquement le **retard de groupe**)

Représentation temporelle « ou » fréquentielle

s(temps) – Shannon



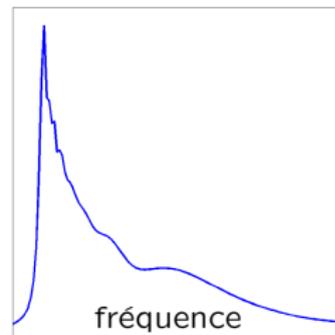
$$s(t) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_t \rangle$$

Transformée de
Fourier

$$s(t) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_{tf} \rangle$$

$$S(f) = \langle s, e_{tf} \rangle$$

S(fréquence) – Fourier

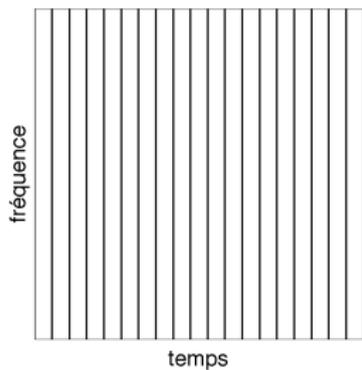


$$S(f) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_f \rangle$$

- représentations duales : localisation \leftrightarrow délocalisation
 - transformée de Fourier « mal adaptée » aux non-stationarités
- combiner les deux types d'information
 - associer à chaque composante fréquentielle une date d'existence (et réciproquement)
 - formellement on sait calculer la **fréquence instantanée** (et réciproquement le **retard de groupe**)

Représentations temporelle « et » fréquentielle linéaires

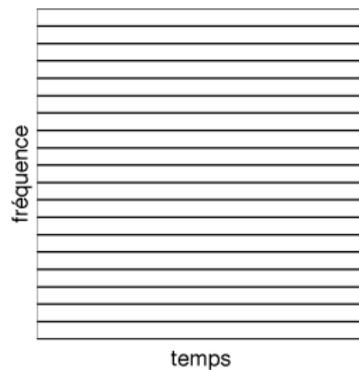
pavage Shannon



$$s(t) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_t \rangle$$

$$\sigma(t, f) =$$

pavage Fourier

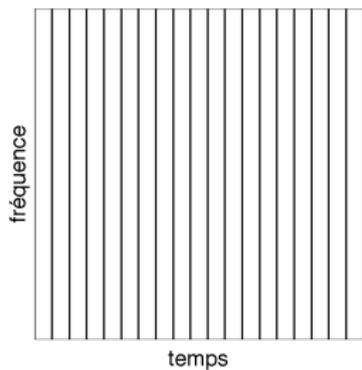


$$S(f) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_f \rangle$$

- garder l'opérateur linéaire
- choisir des fonctions d'analyse localisées en temps et en fréquence : **atomes**

Représentations temporelle « et » fréquentielle linéaires

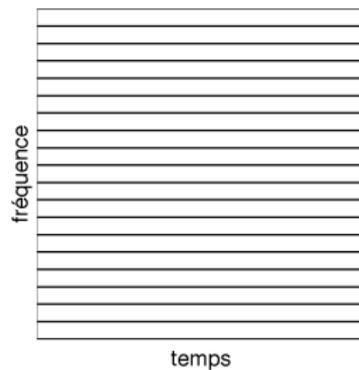
pavage Shannon



$$s(t) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_t \rangle$$

$$\sigma(t, f) = \langle \mathcal{S}, \quad \rangle$$

pavage Fourier

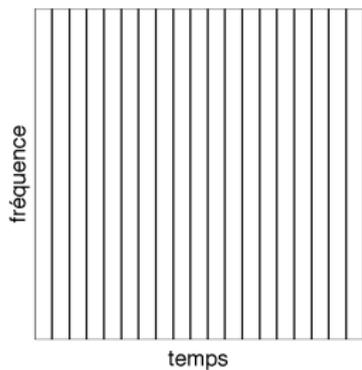


$$S(f) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_f \rangle$$

- garder l'opérateur linéaire
- choisir des fonctions d'analyse localisées en temps et en fréquence : **atomes**

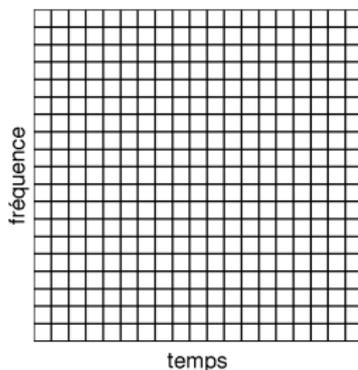
Représentations temporelle « et » fréquentielle linéaires

pavage Shannon



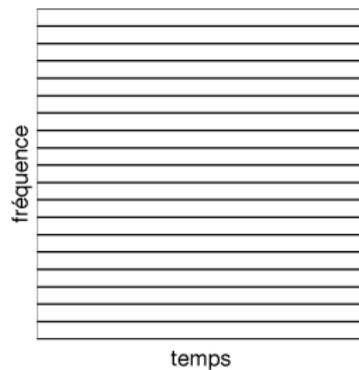
$$s(t) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_t \rangle$$

pavage localisé



$$\sigma(t, f) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_{t,f} \rangle$$

pavage Fourier



$$S(f) = \langle \mathcal{S}, \mathcal{E}_f \rangle$$

- garder l'opérateur linéaire
- choisir des fonctions d'analyse localisées en temps et en fréquence : **atomes**

Décompositions atomiques

Pavage par réplication d'une fonction prototype d'analyse ϕ_0

$$\sigma(t, f) = \langle s, \mathbb{A}_t \mathbb{B}_f \phi_0 \rangle$$

$\mathbb{A}_t, \mathbb{B}_f$: opérateurs de déplacement

Décompositions atomiques

Pavage par réplication d'une fonction prototype d'analyse ϕ_0

$$\sigma(t, f) = \langle s, \mathbb{A}_t \mathbb{B}_f \phi_0 \rangle$$

$\mathbb{A}_t, \mathbb{B}_f$: opérateurs de déplacement

Transformée de Fourier à court terme
(temps-fréquence)

Décomposition en ondelettes
(temps-échelle)

Décompositions atomiques

Pavage par réplication d'une fonction prototype d'analyse ϕ_0

$$\sigma(t, f) = \langle s, \mathbb{A}_t \mathbb{B}_f \phi_0 \rangle$$

$\mathbb{A}_t, \mathbb{B}_f$: opérateurs de déplacement

Transformée de Fourier à court terme
(temps-fréquence)

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_t \phi_0(u) &= \phi_0(u - t) \\ \mathbb{B}_f \phi_0(u) &= \phi_0(u) e^{i2\pi fu} \end{aligned}$$

Décomposition en ondelettes
(temps-échelle)

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_t \phi_0(u) &= \phi_0(u - t) \\ \mathbb{B}_\lambda \phi_0(u) &= \lambda \phi_0(\lambda u) \quad [\lambda \equiv f^{-1}] \end{aligned}$$

Décompositions atomiques

Pavage par réplication d'une fonction prototype d'analyse ϕ_0

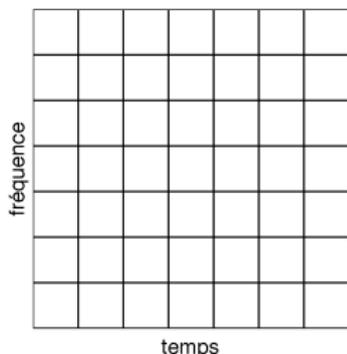
$$\sigma(t, f) = \langle s, \mathbb{A}_t \mathbb{B}_f \phi_0 \rangle$$

$\mathbb{A}_t, \mathbb{B}_f$: opérateurs de déplacement

Transformée de Fourier à court terme
(temps-fréquence)

$$\mathbb{A}_t \phi_0(u) = \phi_0(u - t)$$

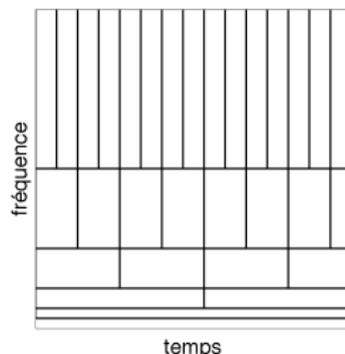
$$\mathbb{B}_f \phi_0(u) = \phi_0(u) e^{i2\pi fu}$$



Décomposition en ondelettes
(temps-échelle)

$$\mathbb{A}_t \phi_0(u) = \phi_0(u - t)$$

$$\mathbb{B}_\lambda \phi_0(u) = \lambda \phi_0(\lambda u) \quad [\lambda \equiv f^{-1}]$$



Décompositions atomiques

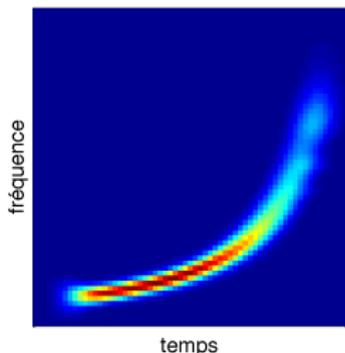
Pavage par réplication d'une fonction prototype d'analyse ϕ_0

$$\sigma(t, f) = \langle s, \mathbb{A}_t \mathbb{B}_f \phi_0 \rangle$$

$\mathbb{A}_t, \mathbb{B}_f$: opérateurs de déplacement

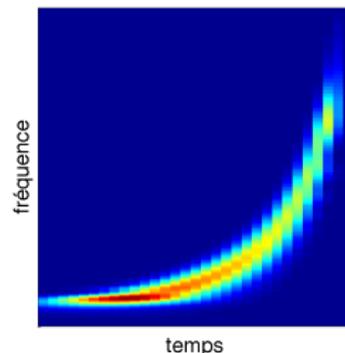
Transformée de Fourier à court terme
(temps-fréquence)

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_t \phi_0(u) &= \phi_0(u - t) \\ \mathbb{B}_f \phi_0(u) &= \phi_0(u) e^{i2\pi fu} \end{aligned}$$



Décomposition en ondelettes
(temps-échelle)

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_t \phi_0(u) &= \phi_0(u - t) \\ \mathbb{B}_\lambda \phi_0(u) &= \lambda \phi_0(\lambda u) \quad [\lambda \equiv f^{-1}] \end{aligned}$$



Décompositions atomiques : points positifs

- Analyse / Interprétation
 - Localiser l'information et détecter des structures
 - Décrire l'évolution du contenu spectral du signal
 - Identifier des organisations déterministes ou statistiques (lois d'échelle)
 - Inversibles (sous certaines conditions)
- Bases orthogonales d'ondelettes
 - Cadre formel pour des calculs explicites
 - Description parcimonieuse \neq redondance
 - Codage, compression, problèmes inverses
 - Algorithmes efficaces

Décompositions atomiques : points positifs

- Analyse / Interprétation
 - Localiser l'information et détecter des structures
 - Décrire l'évolution du contenu spectral du signal
 - Identifier des organisations déterministes ou statistiques (lois d'échelle)
 - Inversibles (sous certaines conditions)
- Bases orthogonales d'ondelettes
 - Cadre formel pour des calculs explicites
 - Description parcimonieuse \neq redondance
 - Codage, compression, problèmes inverses
 - Algorithmes efficaces

Décompositions atomiques : points négatifs

- pixélisation du plan temps-fréquence
 - géométrie contrainte au choix des opérateurs
 - localisation limitée à la granularité des atomes
- non adaptative : choix a priori d'une mesure étalon
- décomposition contraire à la perception d'ensemble
 - « le tout est plus grand que la somme des parties »

Décompositions atomiques : points négatifs

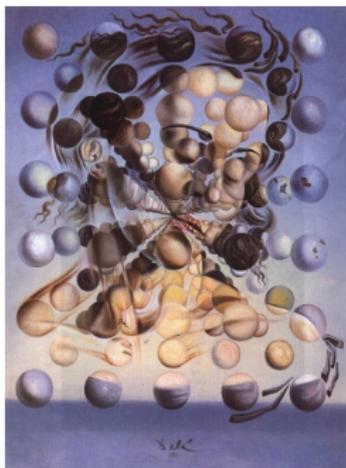
- pixélisation du plan temps-fréquence
 - géométrie contrainte au choix des opérateurs
 - localisation limitée à la granularité des atomes
- non adaptative : choix a priori d'une mesure étalon
- décomposition contraire à la perception d'ensemble
« le tout est plus grand que la somme des parties »

Décompositions atomiques : points négatifs

- pixélisation du plan temps-fréquence
 - géométrie contrainte au choix des opérateurs
 - localisation limitée à la granularité des atomes
- non adaptative : choix a priori d'une mesure étalon
- décomposition contraire à la perception d'ensemble
 - « le tout est plus grand que la somme des parties »

Décompositions atomiques : points négatifs

- pixélisation du plan temps-fréquence
 - géométrie contrainte au choix des opérateurs
 - localisation limitée à la granularité des atomes
- non adaptative : choix a priori d'une mesure étalon
- décomposition contraire à la perception d'ensemble
« le tout est plus grand que la somme des parties »



Contexte pour comprendre :

L'information utile est dans
l'interaction (cognitive) entre
les composantes (atomes)

Représentations temps-fréquence (-échelle) bilinéaires

ne pas imposer de référentiel de mesure prédéfini (pavage)

$$\sigma(t, f) = \langle s, \mathbb{A}_t \mathbb{B}_f \phi_0 \rangle_{\mathcal{G}}$$

- formes quadratiques adaptatives (auto-évaluation)
- « global localisé » : combinaisons d'interactions constructives / destructives selon des symétries \mathcal{G}
- interférences sont les empreintes de la coexistence de composantes (codent le contexte)

Représentations temps-fréquence (-échelle) bilinéaires

ne pas imposer de référentiel de mesure prédéfini (pavage)

$$R(t, f) = \langle s, \mathbb{A}'_t \mathbb{B}'_f s \rangle_{\mathcal{G}}$$

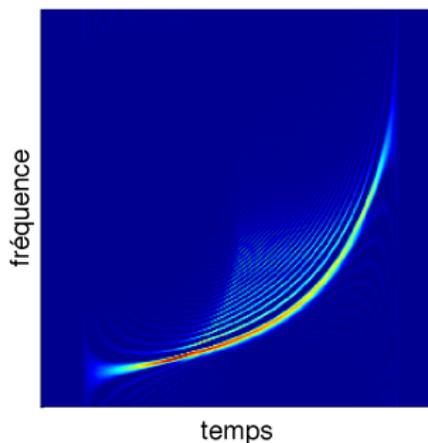
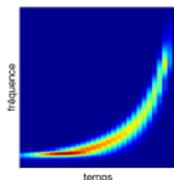
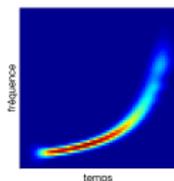
- formes quadratiques adaptatives (auto-évaluation)
- « global localisé » : combinaisons d'interactions constructives / destructives selon des symétries \mathcal{G}
- interférences sont les empreintes de la coexistence de composantes (codent le contexte)

Représentations temps-fréquence (-échelle) bilinéaires

ne pas imposer de référentiel de mesure prédéfini (pavage)

$$R(t, f) = \langle s, \mathbb{A}'_t \mathbb{B}'_f s \rangle_{\mathcal{G}}$$

- formes quadratiques adaptatives (auto-évaluation)
- « global localisé » : combinaisons d'interactions constructives / destructives selon des symétries \mathcal{G}
- interférences sont les empreintes de la coexistence de composantes (codent le contexte)

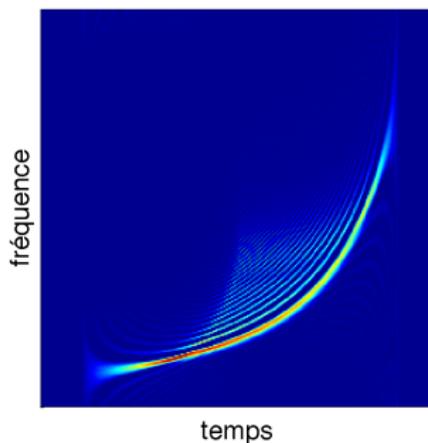
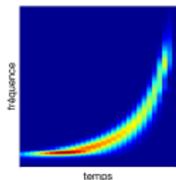
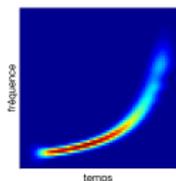


Représentations temps-fréquence (-échelle) bilinéaires

ne pas imposer de référentiel de mesure prédéfini (pavage)

$$R(t, f) = \langle s, \mathbb{A}'_t \mathbb{B}'_f s \rangle_{\mathcal{G}}$$

- formes quadratiques adaptatives (auto-évaluation)
- « global localisé » : combinaisons d'interactions constructives / destructives selon des symétries \mathcal{G}
- interférences sont les empreintes de la coexistence de composantes (codent le contexte)

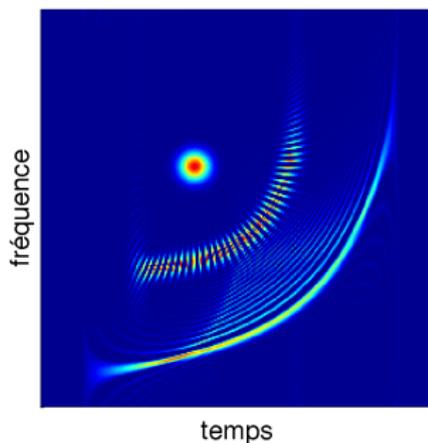
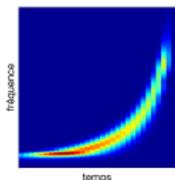
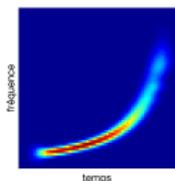


Représentations temps-fréquence (-échelle) bilinéaires

ne pas imposer de référentiel de mesure prédéfini (pavage)

$$R(t, f) = \langle s, \mathbb{A}'_t \mathbb{B}'_f s \rangle_{\mathcal{G}}$$

- formes quadratiques adaptatives (auto-évaluation)
- « global localisé » : combinaisons d'interactions constructives / destructives selon des symétries \mathcal{G}
- interférences sont les empreintes de la coexistence de composantes (codent le contexte)



Représentations temps-fréquence (-échelle) bilinéaires

- valeurs non positives
- calcul non local
- interprétation difficile

Représentations temps-fréquence (-échelle) bilinéaires

- valeurs non positives
 - calcul non local
 - interprétation difficile
- ▶ filtrage (lissage) local dans le plan temps-fréquence

$$R(t, f; \Pi) = \iint R(\tau, \nu) \Pi(\tau, \nu, t, f) d\mu_{\mathcal{G}}(\tau, \nu)$$

Représentations temps-fréquence (-échelle) bilinéaires

- valeurs non positives
- calcul non local
- interprétation difficile

- ▶ filtrage (lissage) local dans le plan temps-fréquence

$$R(t, f; \Pi) = \iint R(\tau, \nu) \Pi(\tau, \nu, t, f) d\mu_{\mathcal{G}}(\tau, \nu)$$

Objectif possible – choix astucieux du noyau Π pour réduire les termes interférentiels tout en préservant la localisation des composantes signal

Temps-fréquence (-échelle) bilinéaire : Contributions

- distributions pseudo Wigner affines [PG & Baraniuk, 1998]
- distributions hybrides linéaire-bilinéaires [PG, Pasquier & Baraniuk, 1999]
- diffusion dans le champ temps-fréquence [PG, Payot et al., 1998-2005]

Temps-fréquence (-échelle) bilinéaire : Contributions

- distributions pseudo Wigner affines [PG & Baraniuk, 1998]
- distributions hybrides linéaire-bilinéaires [PG, Pasquier & Baraniuk, 1999]
- diffusion dans le champ temps-fréquence [PG, Payot et al., 1998-2005]

Diffusion temps-fréquence

[PG & Payot, 1998]

- noyau 2-D gaussien (de variance σ^2) :
 - est un choix classique de lissage
 - est la fonction de Green de l'équation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \Delta_{t, f} D(t, f; \theta) \end{cases}$$

- diffusion homogène \rightarrow lissage uniforme gaussien $\sigma^2 = 2\theta$
- diffusion non homogène \rightarrow lissage variable dans le plan

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \operatorname{div}_{t, f}(\mathbf{C}_s(t, f) \cdot \nabla_{t, f} D(t, f; \theta)) \end{cases}$$

Diffusion temps-fréquence

[PG & Payot, 1998]

- noyau 2-D gaussien (de variance σ^2) :
 - est un choix classique de lissage
 - est la fonction de Green de l'équation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \Delta_{t, f} D(t, f; \theta) \end{cases}$$

- diffusion homogène \rightarrow lissage uniforme gaussien $\sigma^2 = 2\theta$
- diffusion non homogène \rightarrow lissage variable dans le plan

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \operatorname{div}_{t, f}(\mathbf{C}_s(t, f) \cdot \nabla_{t, f} D(t, f; \theta)) \end{cases}$$

Diffusion temps-fréquence

[PG & Payot, 1998]

- noyau 2-D gaussien (de variance σ^2) :
 - est un choix classique de lissage
 - est la fonction de Green de l'équation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \Delta_{t, f} D(t, f; \theta) \end{cases}$$

- diffusion homogène \rightarrow lissage uniforme gaussien $\sigma^2 = 2\theta$
- diffusion non homogène \rightarrow lissage variable dans le plan

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \operatorname{div}_{t, f}(\mathbf{C}_s(t, f) \cdot \nabla_{t, f} D(t, f; \theta)) \end{cases}$$

Diffusion temps-fréquence

[PG & Payot, 1998]

- noyau 2-D gaussien (de variance σ^2) :
 - est un choix classique de lissage
 - est la fonction de Green de l'équation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \Delta_{t, f} D(t, f; \theta) \end{cases}$$

- diffusion homogène \rightarrow lissage uniforme gaussien $\sigma^2 = 2\theta$
- diffusion non homogène \rightarrow lissage variable dans le plan

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \operatorname{div}_{t, f}(\mathbf{C}_s(t, f) \cdot \nabla_{t, f} D(t, f; \theta)) \end{cases}$$

Diffusion temps-fréquence

[PG & Payot, 1998]

- noyau 2-D gaussien (de variance σ^2) :
 - est un choix classique de lissage
 - est la fonction de Green de l'équation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \Delta_{t, f} D(t, f; \theta) \end{cases}$$

- diffusion homogène \rightarrow lissage uniforme gaussien $\sigma^2 = 2\theta$
- diffusion non homogène \rightarrow lissage variable dans le plan

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \operatorname{div}_{t, f}(\mathbf{C}_s(t, f) \cdot \nabla_{t, f} D(t, f; \theta)) \end{cases}$$

Diffusion temps-fréquence

- diffusion non homogène, **non linéaire** : lissage adaptatif

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \operatorname{div}_{t, f}(D(t, f; \theta) \cdot \nabla_{t, f} D(t, f; \theta)) \end{cases}$$

Diffusion temps-fréquence

- diffusion non homogène, **non linéaire** : lissage adaptatif

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \operatorname{div}_{t, f}(D(t, f; \theta) \cdot \nabla_{t, f} D(t, f; \theta)) \end{cases}$$

(diffusion.avi)

Diffusion temps-fréquence

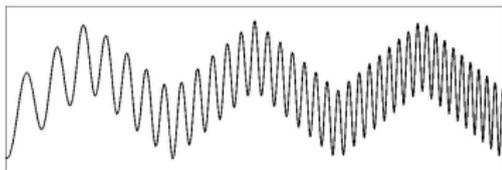
- diffusion non homogène, **non linéaire** : lissage adaptatif

$$\begin{cases} D(t, f; \theta = 0) = R(t, f) \\ \frac{\partial D(t, f; \theta)}{\partial \theta} = \operatorname{div}_{t, f}(D(t, f; \theta) \cdot \nabla_{t, f} D(t, f; \theta)) \end{cases}$$

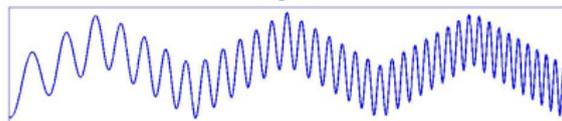
- diffusions généralisées [PG, Gosme & Richard 2002-05]
 - **diffusion affine** : schéma adapté à l'opérateur de changement d'échelle
 - **diffusion anisotrope** : intégrer le facteur géométrique pour tenir compte de l'orientation locale des composantes dans le plan temps-fréquence (principe commun aux « x-lettres »)

EMD : Algorithmme

Sifting process

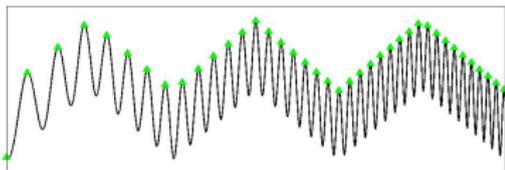


Signal

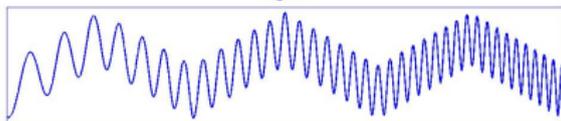


EMD : Algorithmme

Sifting process

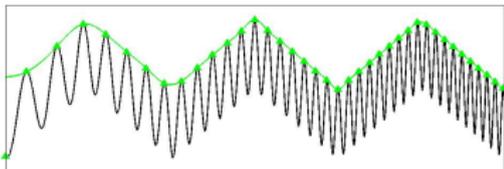


Signal

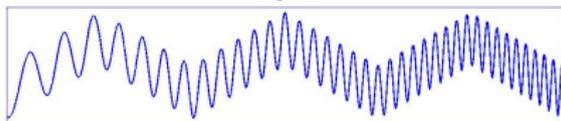


EMD : Algorithmme

Sifting process

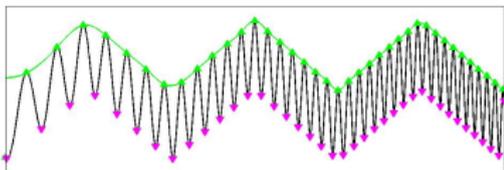


Signal

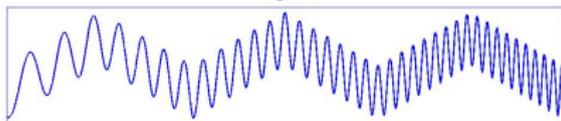


EMD : Algorithmme

Sifting process

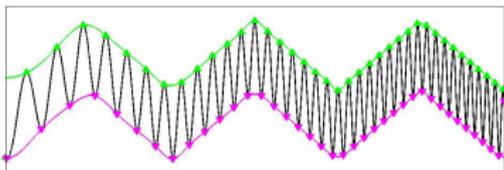


Signal

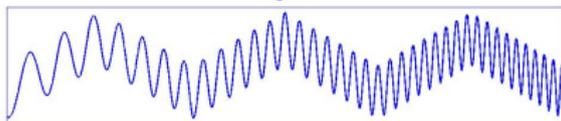


EMD : Algorithmme

Sifting process

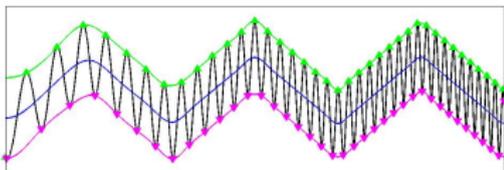


Signal

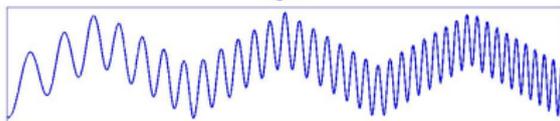


EMD : Algorithmme

Sifting process

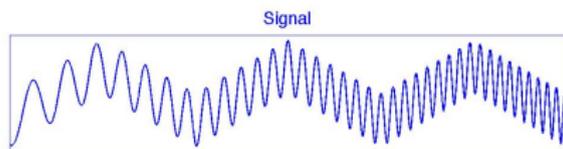
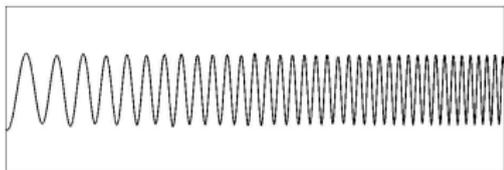
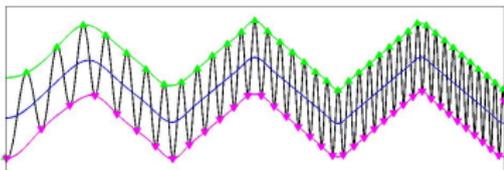


Signal



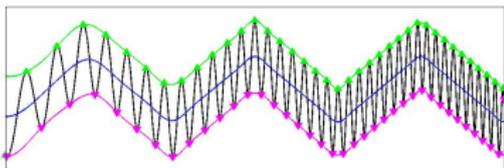
EMD : Algorithmme

Sifting process

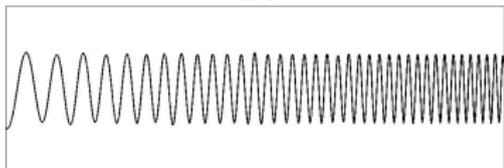


EMD : Algorithmme

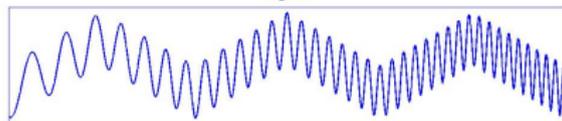
Sifting process



Mode propre ?

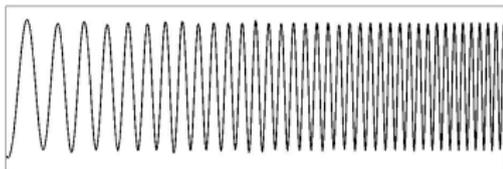


Signal

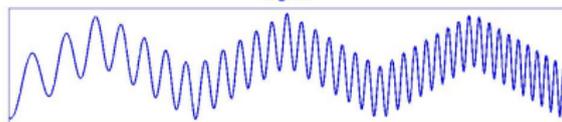


EMD : Algorithme

Sifting process

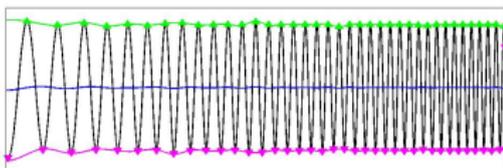


Signal

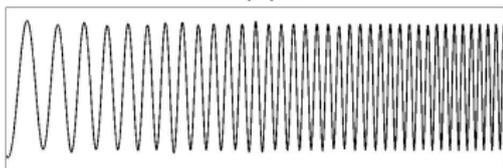


EMD : Algorithmme

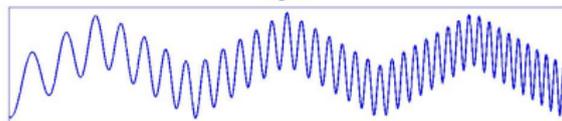
Sifting process



Mode propre ?

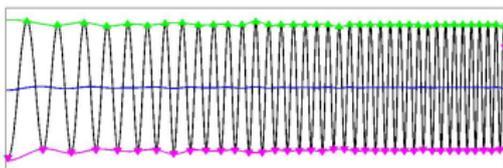


Signal

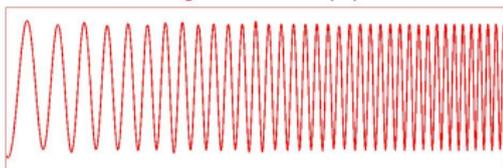


EMD : Algorithme

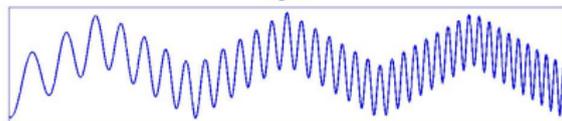
Sifting process



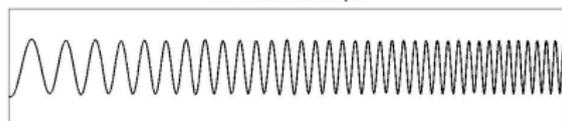
Convergence vers un mode propre



Signal



1er mode intrinsèque

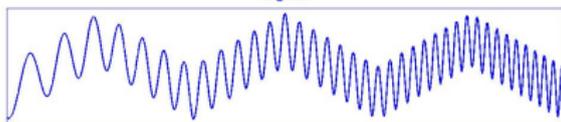


EMD : Algorithme

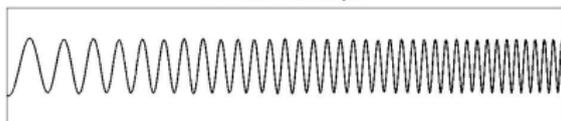
Sifting process



Signal

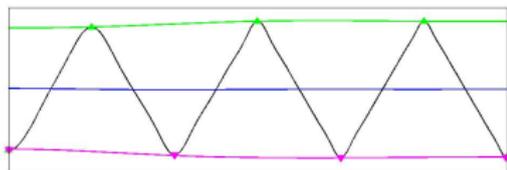


1er mode intrinsèque

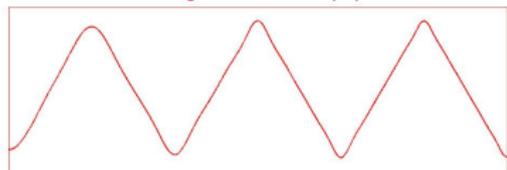


EMD : Algorithmme

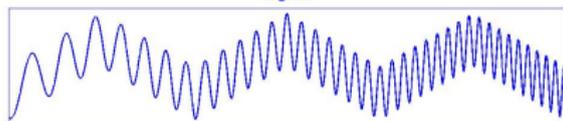
Sifting process



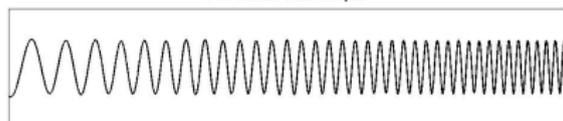
Convergence vers un mode propre



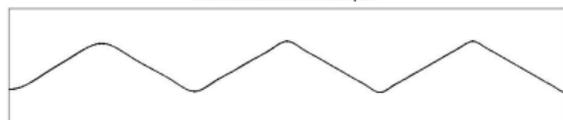
Signal



1er mode intrinsèque

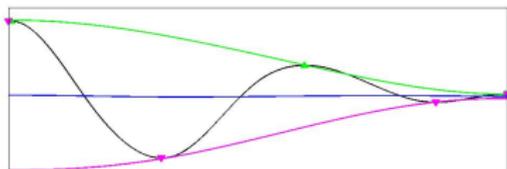


2ème mode intrinsèque



EMD : Algorithme

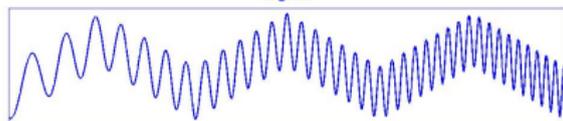
Sifting process



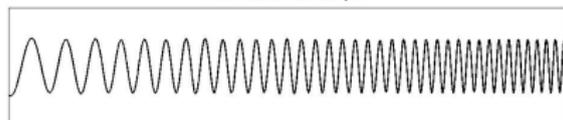
Convergence vers un mode propre



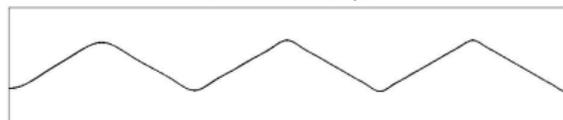
Signal



1er mode intrinsèque



2ème mode intrinsèque



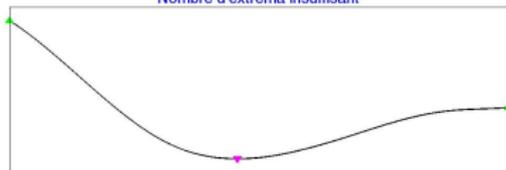
3ème mode intrinsèque



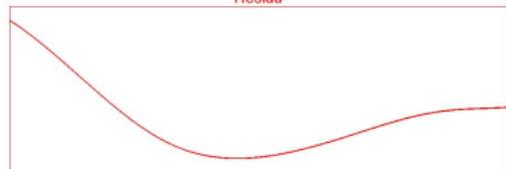
EMD : Algorithme

Sifting process

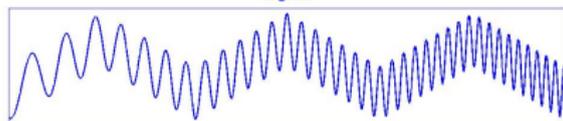
Nombre d'extrema insuffisant



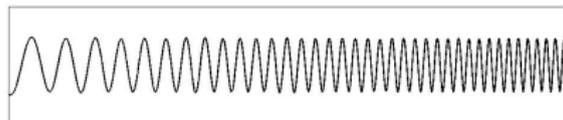
Residu



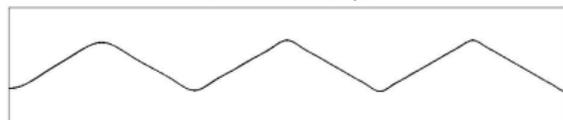
Signal



1er mode intrinsèque



2ème mode intrinsèque



3ème mode intrinsèque



Résidu



EMD : Algorithme

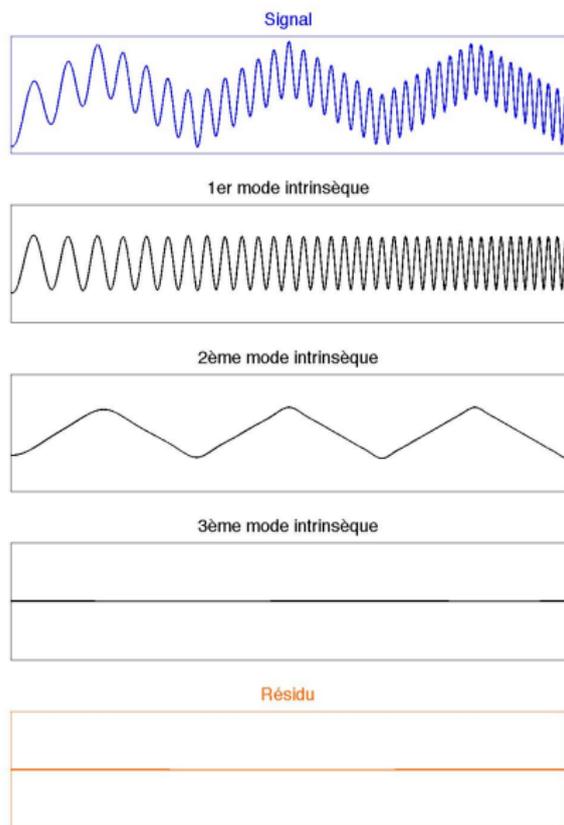
décomposition – répartir la complexité en composantes élémentaires

adaptative – pas d'alphabet choisi a priori (extraction contextuelle des composantes)

locale en temps – adaptée aux non stationnarités

non linéaire – ne vérifie pas de principe de superposition

approche géométrique – pas de cadre algébrique



EMD : Contributions

- caractérisations [PG, Flandrin & Rilling, 2004–07] (mieux comprendre les mécanismes et le comportement de l'EMD)
 - pouvoir de résolution spectrale
 - organisation spontanée et adaptative en banc de filtre (dyadique) de type ondelettes
- extension bivariée, analyse de bruits complexes [PG, Flandrin & Rilling, 2004, 2007]
- aspects algorithmiques [PG, Rilling et al., 2003]
- version 2D [PG & Esterni, 2002]
- application au débruitage, à la suppression de dérives [PG, Flandrin & Rilling, 2004, 2005]
- applications : rythme cardiaque [PG, Chalabi et al., 2005], EEG du sommeil [PG, Baykut et al., 2009], imagerie satellite [PG, Carrão et al., 2005]

EMD : Contributions

- caractérisations [PG, Flandrin & Rilling, 2004–07] (mieux comprendre les mécanismes et le comportement de l'EMD)
 - pouvoir de résolution spectrale
 - organisation spontanée et adaptative en banc de filtre (dyadique) de type ondelettes
- extension bivariée, analyse de bruits complexes [PG, Flandrin & Rilling, 2004, 2007]
- aspects algorithmiques [PG, Rilling et al., 2003]
- version 2D [PG & Esterni, 2002]
- application au débruitage, à la suppression de dérives [PG, Flandrin & Rilling, 2004, 2005]
- applications : rythme cardiaque [PG, Chalabi et al., 2005], EEG du sommeil [PG, Baykut et al., 2009], imagerie satellite [PG, Carrão et al., 2005]

EMD : Contributions

- caractérisations [PG, Flandrin & Rilling, 2004–07] (mieux comprendre les mécanismes et le comportement de l'EMD)
 - pouvoir de résolution spectrale
 - organisation spontanée et adaptative en banc de filtre (dyadique) de type ondelettes
- extension bivariée, analyse de bruits complexes [PG, Flandrin & Rilling, 2004, 2007]
- aspects algorithmiques [PG, Rilling et al., 2003]
- version 2D [PG & Esterni, 2002]
- application au débruitage, à la suppression de dérives [PG, Flandrin & Rilling, 2004, 2005]
- applications : rythme cardiaque [PG, Chalabi et al., 2005], EEG du sommeil [PG, Baykut et al., 2009], imagerie satellite [PG, Carrão et al., 2005]

EMD : Décomposition multi-échelle

[PG, Flandrin, et al., 2004]

Réponse impulsionnelle

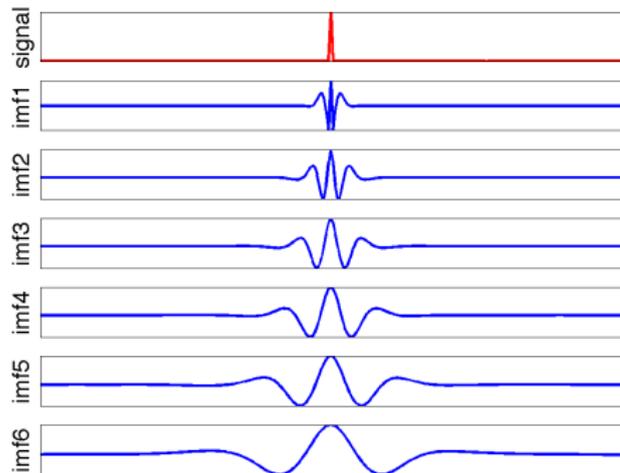
Modes propres – fonctions oscillantes quasi-orthogonales (type ondelettes)

Échelles caractéristiques – organisation spontanée en banc de filtres dyadiques

EMD : Décomposition multi-échelle

[PG, Flandrin, et al., 2004]

Réponse impulsionnelle



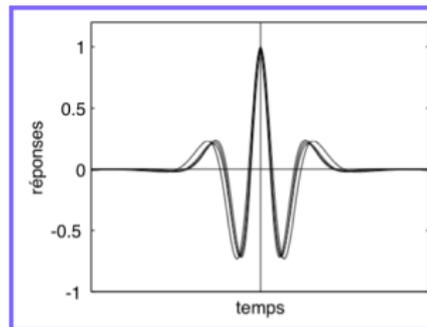
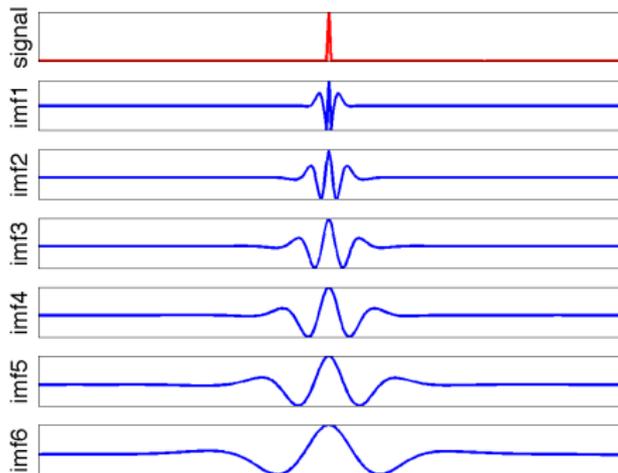
Modes propres – fonctions oscillantes quasi-orthogonales (type ondelettes)

Échelles caractéristiques – organisation spontanée en banc de filtres dyadiques

EMD : Décomposition multi-échelle

[PG, Flandrin, et al., 2004]

Réponse impulsionnelle



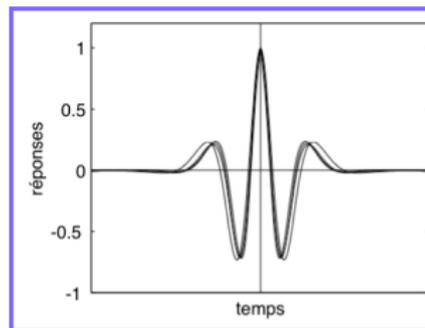
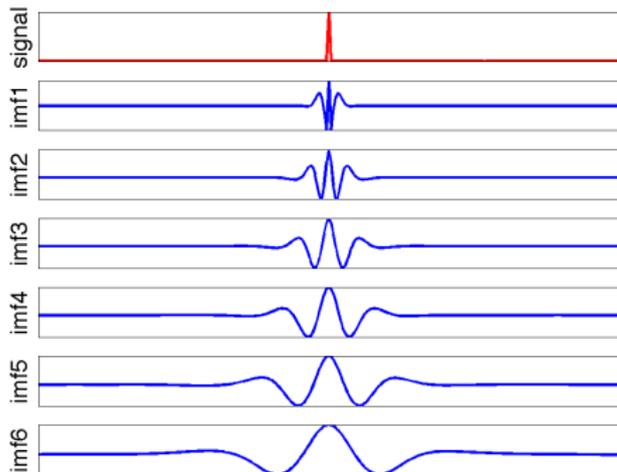
Modes propres – fonctions oscillantes quasi-orthogonales (type ondelettes)

Échelles caractéristiques – organisation spontanée en banc de filtres dyadiques

EMD : Décomposition multi-échelle

[PG, Flandrin, et al., 2004]

Réponse impulsionnelle



Modes propres – fonctions oscillantes quasi-orthogonales (type ondelettes)

Échelles caractéristiques – organisation spontanée en banc de filtres dyadiques

« Mesures » admissibles pour l'estimation de lois d'échelle

Loi d'invariance d'échelle

Définition

Soient :

- une transformation dépendante de l'échelle : $f \mapsto f_a$ ($f_a \xrightarrow{a \rightarrow 0} f$)
- une « mesure » (algébrique, statistique, géométrique) : $\mathcal{M}[f_a]$

Une propriété d'invariance d'échelle (locale ou globale) d'exposant α se traduit par la loi de puissance :

$$\mathcal{M}[f_a] = \mathcal{O}(a^\alpha) \text{ pour } \underline{a} \leq a \leq \bar{a}$$

Loi d'invariance d'échelle

Définition

Soient :

- une transformation dépendante de l'échelle : $f \mapsto f_a$ ($f_a \xrightarrow{a \rightarrow 0} f$)
- une « mesure » (algébrique, statistique, géométrique) : $\mathcal{M}[f_a]$

Une propriété d'invariance d'échelle (locale ou globale) d'exposant α se traduit par la loi de puissance :

$$\mathcal{M}[f_a] = \mathcal{O}(a^\alpha) \text{ pour } \underline{a} \leq a \leq \bar{a}$$

Dimensions fractales	Projection espaces multirésolutions	Longueur	$[\underline{a}, \bar{a}]$
Régularité hölderienne	Accroissements	Amplitude	$\underline{a} \rightarrow 0$
Longue dépendance	Coefficients d'ondelettes	Variance	$\bar{a} \rightarrow \infty$
Auto-similarité	Dilatation/compression	Distribution	$[\underline{a}, \bar{a}]$
⋮	⋮	⋮	⋮

Estimation de lois d'échelle

Principe – Premières techniques « anciennes » : Grassberger-Procaccia (83), Burlaga-Klein (86), Whittle (Künsch, 1987), Higuchi (88), ...

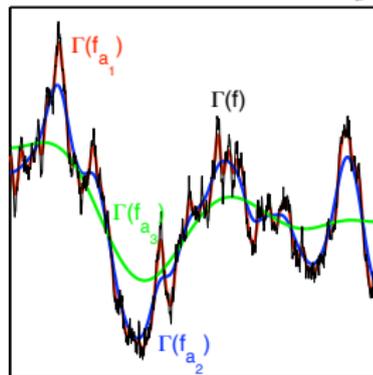
Progrès – Méthodes ondelettes : Jaffard (91), Flandrin (92), Wornell (92), Tewfik (92), Bacry (93), ...

Estimation de lois d'échelle

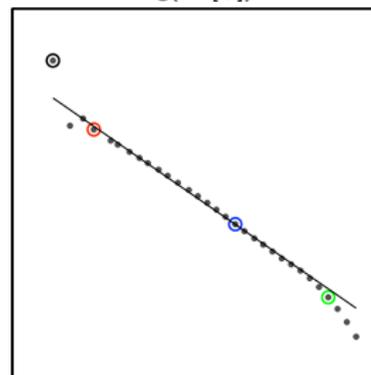
Principe – Premières techniques « anciennes » : Grassberger-Procaccia (83), Burlaga-Klein (86), Whittle (Künsch, 1987), Higuchi (88), ...

Progrès – Méthodes ondelettes : Jaffard (91), Flandrin (92), Wornell (92), Tewfik (92), Bacry (93), ...

Transformation $f \mapsto f_a$



$\log(\mathcal{M}[f_a])$



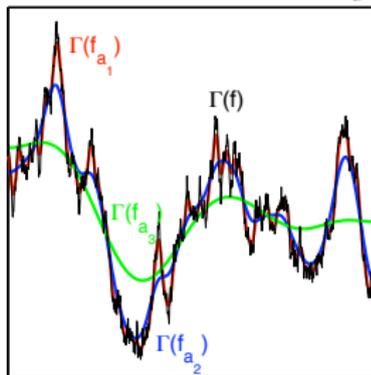
$$-\infty \leq \log(a) \leq \log(a) \leq \log(\bar{a}) \leq \infty$$

Estimation de lois d'échelle

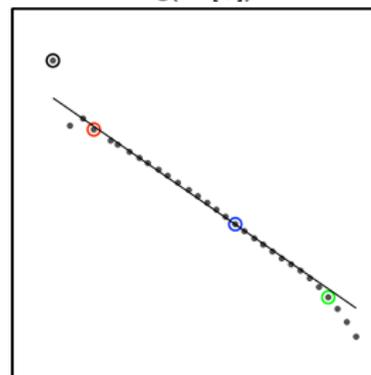
Principe – Premières techniques « anciennes » : Grassberger-Procaccia (83), Burlaga-Klein (86), Whittle (Künsch, 1987), Higuchi (88), ...

Progrès – Méthodes ondelettes : Jaffard (91), Flandrin (92), Wornell (92), Tewfik (92), Bacry (93), ...

Transformation $f \mapsto f_a$



$\log(\mathcal{M}[f_a])$



$$-\infty \leq \log(a) \leq \log(a) \leq \log(\bar{a}) \leq \infty$$

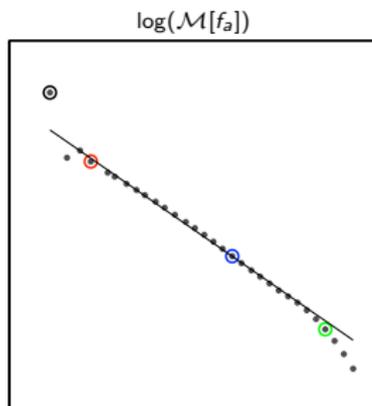
Estimation de lois d'échelle

Principe – Premières techniques « anciennes » : Grassberger-Procaccia (83), Burlaga-Klein (86), Whittle (Künsch, 1987), Higuchi (88), ...

Progrès – Méthodes ondelettes : Jaffard (91), Flandrin (92), Wornell (92), Tewfik (92), Bacry (93), ...

Décompositions en ondelettes :

- Décorrélation
- Stationnarisation
- Localisation temporelle
- Cadre théorique



$$-\infty \leq \log(\underline{a}) \leq \log(a) \leq \log(\bar{a}) \leq \infty$$

Estimation de lois d'échelle : Contributions

Cas des lois (localement) homogènes

- Evaluation des performances statistiques des estimateurs ondelettes [PG, Abry & Flandrin, 1995]
- Décomposition en ondelettes multiples et estimation de régularités discontinues [PG & Abry, 1997]
 - ◀ Utilisation des distribution bilinéaires affine pour l'estimation de régularités locales et de singularités isolées [PG & Flandrin, 1993]
- Modélisation des décompositions orthogonales en ondelettes par Arbres de Markov Cachés (paramétrique) [PG, Durand & Guédon, 2004]
- Adaptativité de l'EMD versus structures prédéfinies des ondelettes [PG, Rilling et al., 2004-07]
- Test d'existence des moments d'une variable aléatoire [PG & Riedi, 2005]

Estimation de lois d'échelle : Contributions

Cas des lois (localement) homogènes

- Evaluation des performances statistiques des estimateurs ondelettes [PG, Abry & Flandrin, 1995]
- Décomposition en ondelettes multiples et estimation de régularités discontinues [PG & Abry, 1997]
 - ◀ Utilisation des distribution bilinéaires affine pour l'estimation de régularités locales et de singularités isolées [PG & Flandrin, 1993]
- Modélisation des décompositions orthogonales en ondelettes par Arbres de Markov Cachés (paramétrique) [PG, Durand & Guédon, 2004]
- Adaptativité de l'EMD versus structures prédéfinies des ondelettes [PG, Rilling et al., 2004-07]
- Test d'existence des moments d'une variable aléatoire [PG & Riedi, 2005]

Estimation de lois d'échelle : Contributions

Cas des lois (localement) homogènes

- Evaluation des performances statistiques des estimateurs ondelettes [PG, Abry & Flandrin, 1995]
- Décomposition en ondelettes multiples et estimation de régularités discontinues [PG & Abry, 1997]
 - ◀ Utilisation des distribution bilinéaires affine pour l'estimation de régularités locales et de singularités isolées [PG & Flandrin, 1993]
- Modélisation des décompositions orthogonales en ondelettes par Arbres de Markov Cachés (paramétrique) [PG, Durand & Guédon, 2004]
- Adaptativité de l'EMD versus structures prédéfinies des ondelettes [PG, Rilling et al., 2004-07]
- Test d'existence des moments d'une variable aléatoire [PG & Riedi, 2005]

Test d'existence des moments d'une variable aléatoire

Théorème finitude des moments [PG & Riedi, 2005]

Soit $\{X_n, n = 1, \dots, N\}$ un échantillon de N réalisations i.i.d d'une variable aléatoire \mathbf{X} , et $\Psi(\nu)$ une ondelette semi-définie positive.

Il existe une constante $C > 0$ et un réel α tel que

$$\widehat{\Gamma}(a) := N^{-1} \sum_{n=1}^N \Psi(a \cdot X_n) \leq C \cdot a^\alpha, \quad \underline{a} \leq a \leq \bar{a}$$

si et seulement si

$$\mathbb{E}\mathbf{X}^r < \infty, \quad \forall r \leq \alpha$$

Théorique – Relation biunivoque entre l'existence de moments et la régularité de la fonction caractéristique en l'origine

Pratique – Seul estimateur empirique non-paramétrique de cette nature

Algorithmique – Mise en œuvre très simple. Bornes théoriques de régression

Test d'existence des moments d'une variable aléatoire

Théorème finitude des moments [PG & Riedi, 2005]

Soit $\{X_n, n = 1, \dots, N\}$ un échantillon de N réalisations i.i.d d'une variable aléatoire \mathbf{X} , et $\Psi(\nu)$ une ondelette semi-définie positive.

Il existe une constante $C > 0$ et un réel α tel que

$$\hat{\Gamma}(a) := N^{-1} \sum_{n=1}^N \Psi(a \cdot X_n) \leq C \cdot a^\alpha, \quad \underline{a} \leq a \leq \bar{a}$$

si et seulement si

$$\mathbb{E}\mathbf{X}^r < \infty, \quad \forall r \leq \alpha$$

Théorique – Relation biunivoque entre l'existence de moments et la régularité de la fonction caractéristique en l'origine

Pratique – Seul estimateur empirique non-paramétrique de cette nature

Algorithmique – Mise en œuvre très simple. Bornes théoriques de régression

Lois d'invariance d'échelle

Cas des lois non homogènes (multifractal)

Définition

Soit $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{R}$, une fonction de régularité locale $\xi(t)$

$$D(\alpha) = \dim \{t \in \mathcal{I} : \xi(t) = \alpha\}$$

$0 \leq D(\alpha) \leq 1$: spectre multifractal (spectre de singularités) de f

Lois d'invariance d'échelle

Cas des lois non homogènes (multifractal)

Définition

Soit $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{R}$, une fonction de régularité locale $\xi(t)$

$$D(\alpha) = \dim \{t \in \mathcal{I} : \xi(t) = \alpha\}$$

$0 \leq D(\alpha) \leq 1$: spectre multifractal (spectre de singularités) de f

Legendre – $\mathbb{E}(\mathcal{M}[f_a])^q \underset{a \rightarrow 0}{\sim} a^{\tau(q)}$ et $L(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \tau(q))$

Grandes Déviations – soit $\mathcal{I}_a = \{I_a^k\}$ une partition de \mathcal{I}

$$G(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} - \frac{\log \#\{I_a^k : \alpha - \varepsilon \leq \xi(I_a^k) \leq \alpha + \varepsilon\}}{\log a}$$

Lois d'invariance d'échelle

Cas des lois non homogènes (multifractal)

Définition

Soit $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{R}$, une fonction de régularité locale $\xi(t)$

$$D(\alpha) = \dim \{t \in \mathcal{I} : \xi(t) = \alpha\}$$

$0 \leq D(\alpha) \leq 1$: spectre multifractal (spectre de singularités) de f

Legendre – $\mathbb{E}(\mathcal{M}[f_a])^q \underset{a \rightarrow 0}{\sim} a^{\tau(q)}$ et $L(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \tau(q))$

Grandes Déviations – soit $\mathcal{I}_a = \{I_a^k\}$ une partition de \mathcal{I}

$$G(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} - \frac{\log \#\{I_a^k : \alpha - \varepsilon \leq \xi(I_a^k) \leq \alpha + \varepsilon\}}{\log a}$$

$$D(\alpha) \leq G(\alpha) \leq L(\alpha)$$

Lois d'invariance d'échelle

Cas des lois non homogènes (multifractal)

Définition

Soit $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{R}$, une fonction de régularité locale $\xi(t)$

$$D(\alpha) = \dim \{t \in \mathcal{I} : \xi(t) = \alpha\}$$

 $0 \leq D(\alpha) \leq 1$: spectre multifractal (spectre de singularités) de f Legendre – $\mathbb{E}(\mathcal{M}[f_a])^q \underset{a \rightarrow 0}{\sim} a^{\tau(q)}$ et $L(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \tau(q))$ Grandes Déviations – soit $\mathcal{I}_a = \{I_a^k\}$ une partition de \mathcal{I}

$$G(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} - \frac{\log \#\{I_a^k : \alpha - \varepsilon \leq \xi(I_a^k) \leq \alpha + \varepsilon\}}{\log a}$$

$$D(\alpha) \leq G(\alpha) \leq L(\alpha)$$

Lois d'invariance d'échelle

Cas des lois non homogènes (multifractal)

Définition

Soit $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{R}$, une fonction de régularité locale $\xi(t)$

$$D(\alpha) = \dim \{t \in \mathcal{I} : \xi(t) = \alpha\}$$

$0 \leq D(\alpha) \leq 1$: spectre multifractal (spectre de singularités) de f

Legendre – $\mathbb{E}(\mathcal{M}[f_a])^q \underset{a \rightarrow 0}{\sim} a^{\tau(q)}$ et $L(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \tau(q))$

Grandes Déviations – soit $\mathcal{I}_a = \{I_a^k\}$ une partition de \mathcal{I}

$$G(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{a \rightarrow 0} - \frac{\log \#\{I_a^k : \alpha - \varepsilon \leq \xi(I_a^k) \leq \alpha + \varepsilon\}}{\log a}$$

$$D(\alpha) \leq G(\alpha) \leq L(\alpha)$$

Lois d'invariance d'échelle : Contributions

Cas des lois non homogènes (multifractal)

- évaluation des performances statistiques des estimateurs ondelettes du spectre de Legendre [PG, Riedi & Baraniuk, 1998]
- test d'existence des moments pour contrôler l'estimation du spectre de Legendre [PG, 2005]
- conditionnement « optimal » de la double limite définissant le spectre des grandes déviations [PG, Barral, 2010]
- un théorème presque sûr de grandes déviations observable sur une réalisation de chaîne de Markov [PG, Loiseau et al., 2009]

Lois d'invariance d'échelle : Contributions

Cas des lois non homogènes (multifractal)

- évaluation des performances statistiques des estimateurs ondelettes du spectre de Legendre [PG, Riedi & Baraniuk, 1998]
- test d'existence des moments pour contrôler l'estimation du spectre de Legendre [PG, 2005]
- conditionnement « optimal » de la double limite définissant le spectre des grandes déviations [PG, Barral, 2010]
- un théorème presque sûr de grandes déviations observable sur une réalisation de chaîne de Markov [PG, Loiseau et al., 2009]

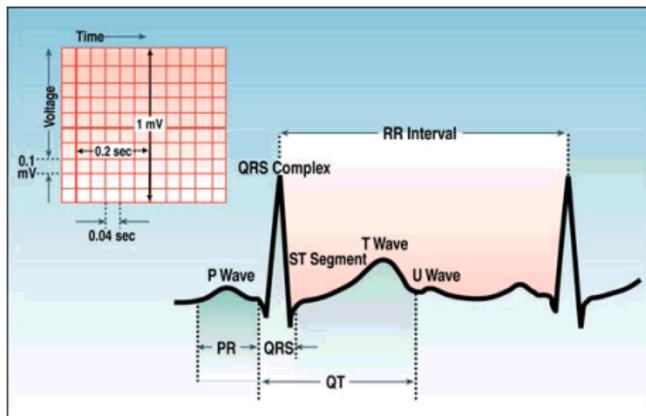
Lois d'invariance d'échelle : Contributions

Cas des lois non homogènes (multifractal)

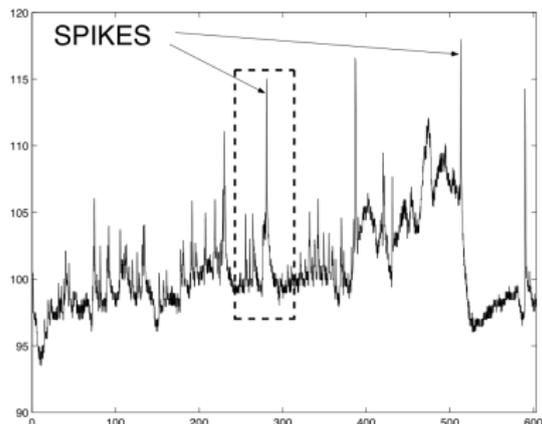
- évaluation des performances statistiques des estimateurs ondelettes du spectre de Legendre [PG, Riedi & Baraniuk, 1998]
- test d'existence des moments pour contrôler l'estimation du spectre de Legendre [PG, 2005]
- conditionnement « optimal » de la double limite définissant le spectre des grandes déviations [PG, Barral, 2010]
- un théorème presque sûr de grandes déviations observable sur une réalisation de chaîne de Markov [PG, Loiseau et al., 2009]

Analyse du rythme cardiaque

ECG

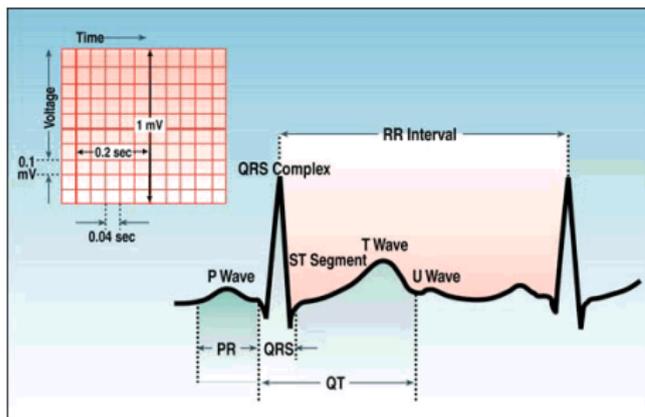


signal RR

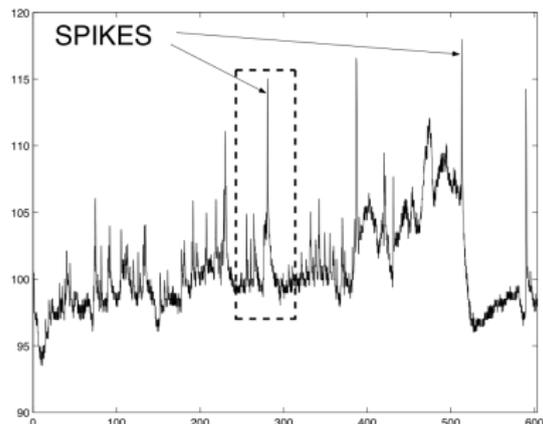


Analyse du rythme cardiaque

ECG



signal RR



- Hôpital Lariboisière [1998-2003]. Analyse du tonus cardiaque chez la souris
- Hôpital Femme-Mère-Enfant [2008-10]. Analyse du rythme cardiaque du fœtus pendant l'accouchement
- Hôpital Kremlin-Bicêtre [2008-10]. Analyse du rythme cardiaque chez l'humain diabétique ou atteint de certaines cardiopathies.

Spectre des Grandes Déviations de signaux RR

[PG, Barral et al., 2010]

$$G(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \#\{I_n^k : \alpha - \varepsilon \leq \xi(I_n^k) \leq \alpha + \varepsilon\}}{n \log(2)}, \quad [a \rightarrow 2^{-n}]$$

Spectre des Grandes Déviations de signaux RR

[PG, Barral et al., 2010]

$$G(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \#\{I_n^k : \alpha - \varepsilon \leq \xi(I_n^k) \leq \alpha + \varepsilon\}}{n \log(2)}, \quad [a \rightarrow 2^{-n}]$$

Un « choix optimal » issu de la théorie des grandes déviations

$$\varepsilon_n \leq (\sigma_{\mu_{q,n}} + \eta) \sqrt{2 \log \log(n)/n}, \quad \text{où } \eta > 0 \text{ et}$$

$$\sigma_{\mu_{q,n}}^2 = \frac{\tau_n''(q)}{-n \log(2)} \quad : \text{ par un argument d'analyse convexe}$$

$$\approx \text{Var}_{\mu_{q,n}}(\alpha_n(q)) \quad : \text{ « naturel » du point de vue estimation}$$

Spectre des Grandes Déviations de signaux RR

[PG, Barral et al., 2010]

$$G(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \#\{I_n^k : \alpha - \varepsilon \leq \xi(I_n^k) \leq \alpha + \varepsilon\}}{n \log(2)}, \quad [a \rightarrow 2^{-n}]$$

Un « choix optimal » issu de la théorie des grandes déviations

$$\varepsilon_n \leq (\sigma_{\mu_{q,n}} + \eta) \sqrt{2 \log \log(n)/n}, \quad \text{où } \eta > 0 \text{ et}$$

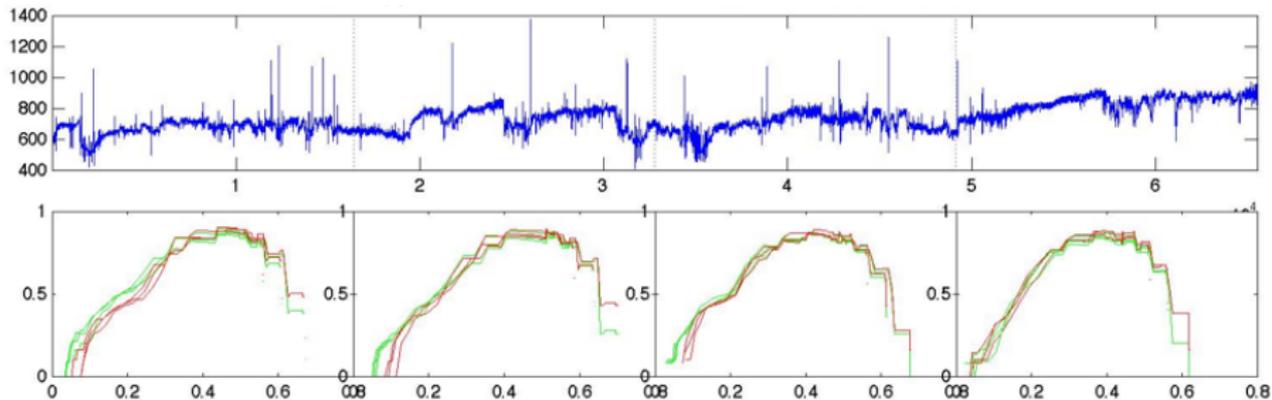
$$\sigma_{\mu_{q,n}}^2 = \frac{\tau_n''(q)}{-n \log(2)} \quad : \text{ par un argument d'analyse convexe}$$

$$\approx \text{Var}_{\mu_{q,n}}(\alpha_n(q)) \quad : \text{ « naturel » du point de vue estimation}$$

Distinction entre accélérations et décélérations du RR

► Couple de spectres de singularités signées

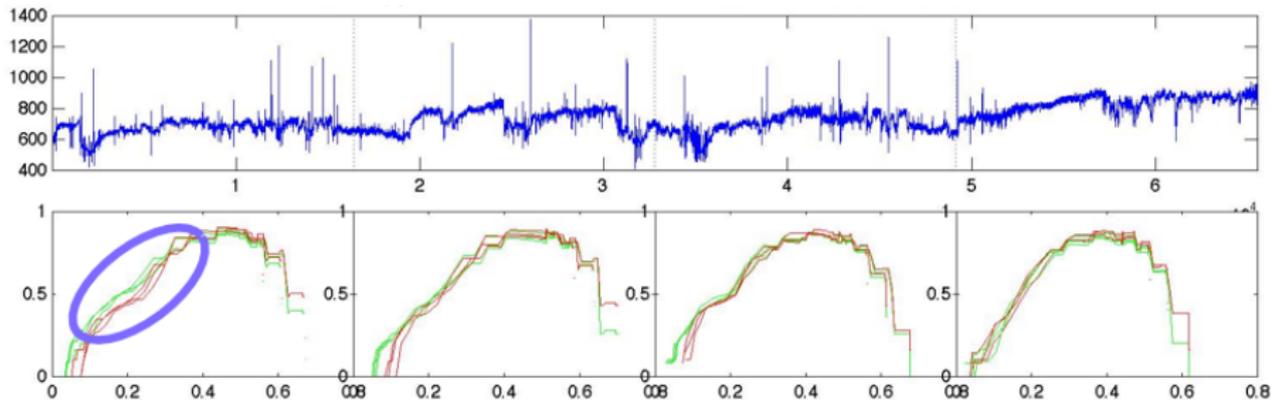
Spectres de singularités signées de signaux RR



Des spectres de singularités plus riches...

- non concavités, expressions de transitions de phases
 - Modèles de séries d'ondelettes [PG, Seuret et al.]
- dynamiques différentes entre accélérations et décélérations cardiaques (fortes variations)
 - dissymétries observées sur les paramètres de forme des bradycardies chez la souris [PG, Swynghedauw et al.]

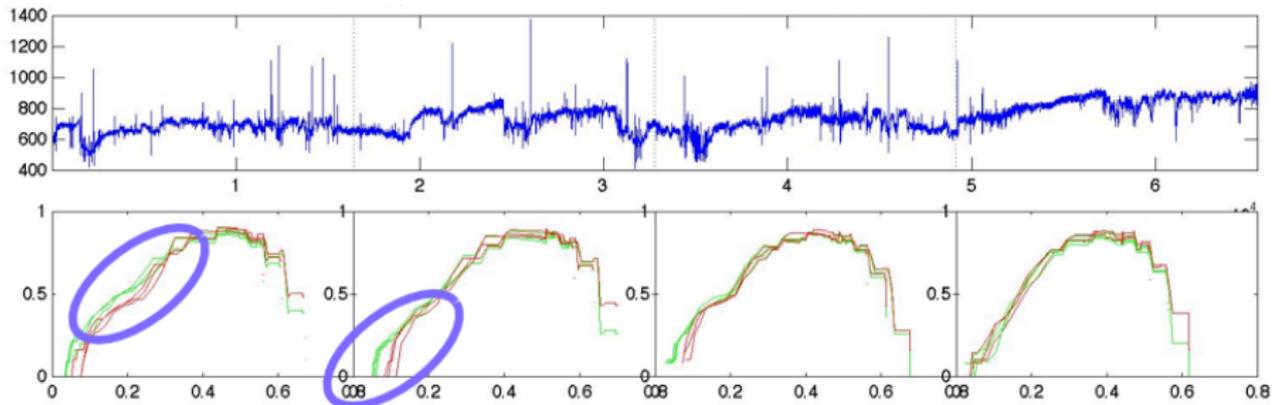
Spectres de singularités signées de signaux RR



Des spectres de singularités plus riches...

- non concavités, expressions de transitions de phases
 - Modèles de séries d'ondelettes [PG, Seuret et al.]
- dynamiques différentes entre accélérations et décélérations cardiaques (fortes variations)
 - dissymétries observées sur les paramètres de forme des bradycardies chez la souris [PG, Swynghedauw et al.]

Spectres de singularités signées de signaux RR

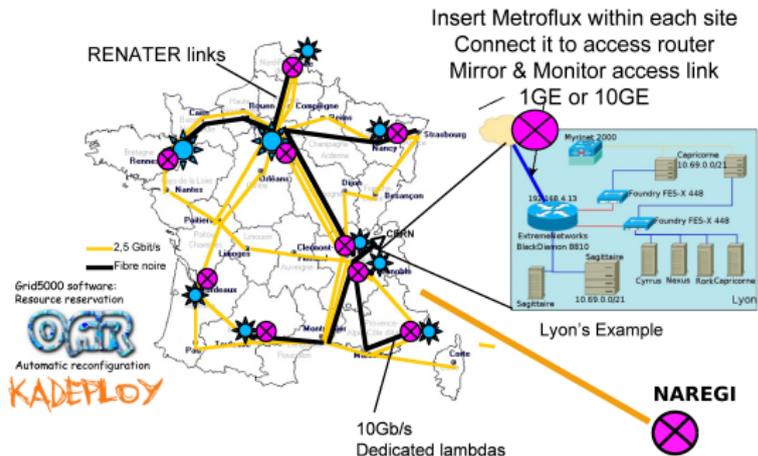


Des spectres de singularités plus riches...

- non concavités, expressions de transitions de phases
 - Modèles de séries d'ondelettes [PG, Seuret et al.]
- dynamiques différentes entre accélérations et décélérations cardiaques (fortes variations)
 - dissymétries observées sur les paramètres de forme des bradycardies chez la souris [PG, Swynghedauw et al.]

Etude du trafic dans les réseaux

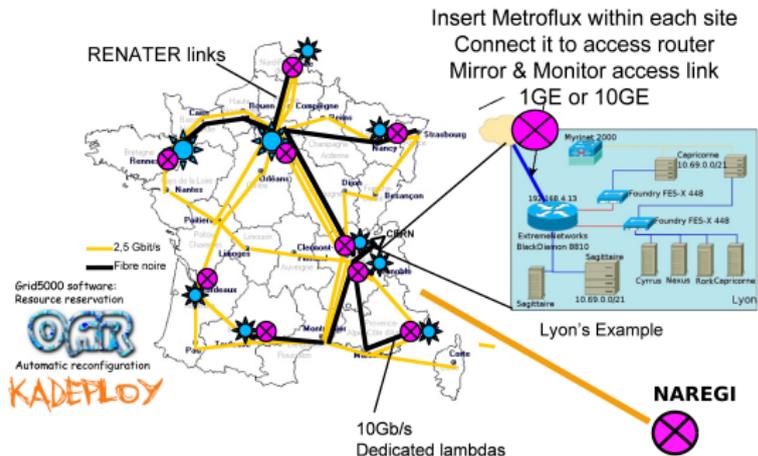
[PG, Loiseau, Vicat-Blanc, et al., 2006-10]



- conception du dispositif de métrologie « MetroFlux »
- validation expérimentale du théorème de Taqqu
- généralisation intégrant la corrélation entre taille et débit des flots
- estimation au sens du MV des distributions à queue lourde des tailles de flots à partir de données incomplètes
- principe ergodique de Grandes Déviations sur un long flot TCP

Etude du trafic dans les réseaux

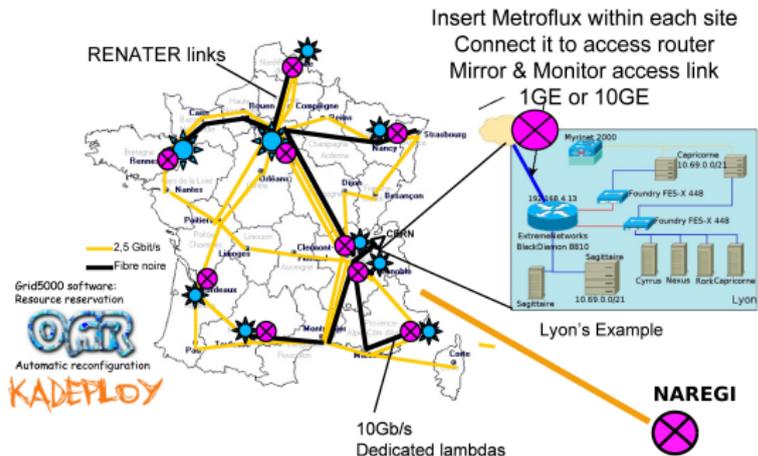
[PG, Loiseau, Vicat-Blanc, et al., 2006-10]



- conception du dispositif de métrologie « MetroFlux »
- validation expérimentale du théorème de Taqqu
- généralisation intégrant la corrélation entre taille et débit des flots
- estimation au sens du MV des distributions à queue lourde des tailles de flots à partir de données incomplètes
- principe ergodique de Grandes Déviations sur un long flot TCP

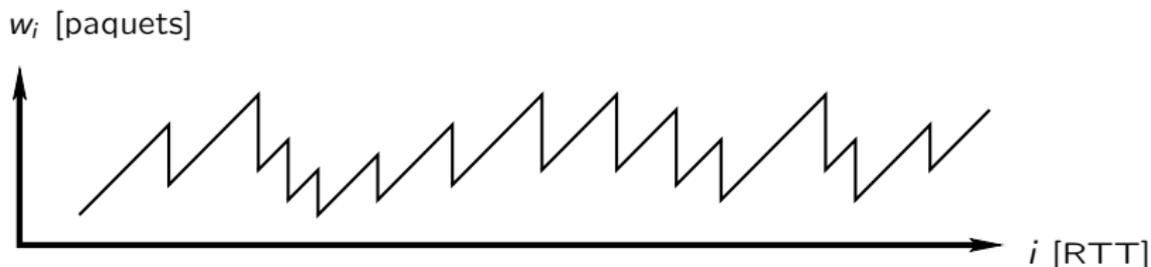
Etude du trafic dans les réseaux

[PG, Loiseau, Vicat-Blanc, et al., 2006-10]



- conception du dispositif de métrologie « MetroFlux »
- validation expérimentale du théorème de Taqqu
- généralisation intégrant la corrélation entre taille et débit des flots
- estimation au sens du MV des distributions à queue lourde des tailles de flots à partir de données incomplètes
- principe ergodique de Grandes Déviations sur un long flot TCP

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



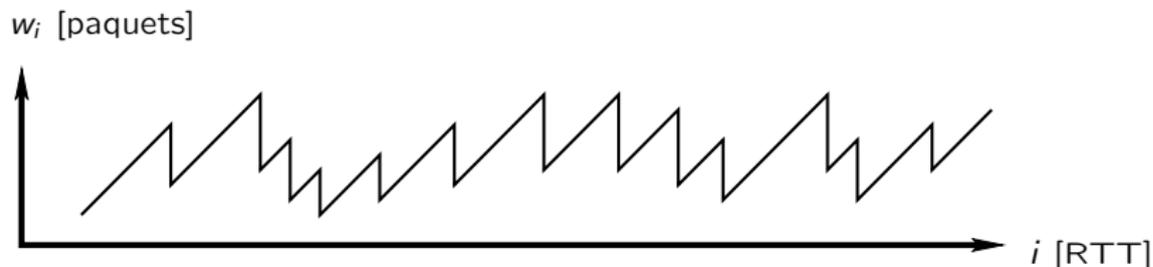
- régime stationnaire : Additive Increase Multiplicative Decrease (AIMD)
- chaîne de Markov (finie, irréductible, apériodique) $(w_i)_{i \geq 1}$, de matrice de transition :

$$Q = \left[\mathbb{P}(w_{i+1} = w' | w_i = w) = \begin{cases} 1 - p(w) & \text{si } w' = w + 1 \\ p(w) & \text{si } w' = \lfloor w/2 \rfloor \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \right]$$

où $p(\cdot)$ est la probabilité de perte d'au moins un paquet

- Exemple : [Padhye, 1998] pertes Bernoulli : $p(w) = 1 - (1 - p_0)^w$

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



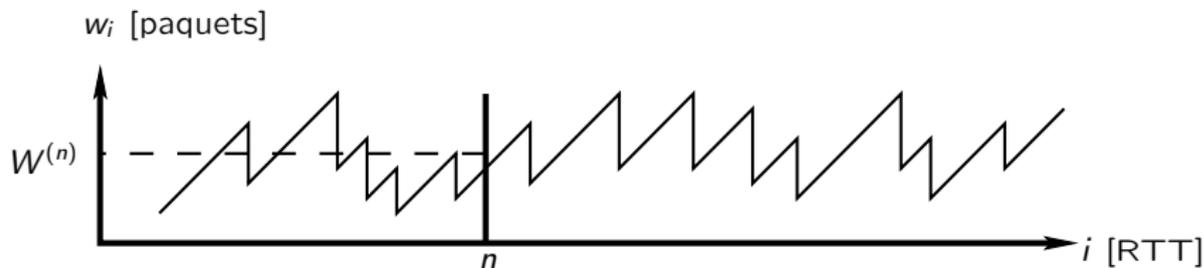
- régime stationnaire : Additive Increase Multiplicative Decrease (AIMD)
- chaîne de Markov (finie, irréductible, apériodique) $(w_i)_{i \geq 1}$, de matrice de transition :

$$Q = \left[\mathbb{P}(w_{i+1} = w' | w_i = w) = \begin{cases} 1 - p(w) & \text{si } w' = w + 1 \\ p(w) & \text{si } w' = \lfloor w/2 \rfloor \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \right]$$

où $p(\cdot)$ est la probabilité de perte d'au moins un paquet

- Exemple : [Padhye, 1998] pertes Bernoulli : $p(w) = 1 - (1 - p_0)^w$

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



Théorème de Birkhoff – Pour presque toute réalisation

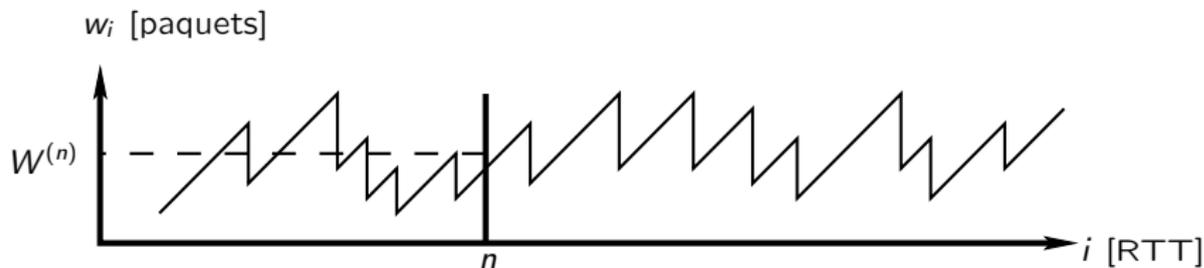
$$W^{(n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\text{P.S.}} W^{(\infty)} = \mathbb{E} w_i \quad (\blacktriangleright \text{ Pertes Bernoulli : } w^{(\infty)} \sim \sqrt{\frac{3}{2\rho_0}})$$

Théorème de Ellis (GD) – En loi

$$\mathbb{P} \left(W^{(n)} \simeq \omega \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp(n \cdot f(\omega))$$

$f(\omega) \leq 0$: spectre des grandes déviations, invariant avec n

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



Théorème de Birkhoff – Pour presque toute réalisation

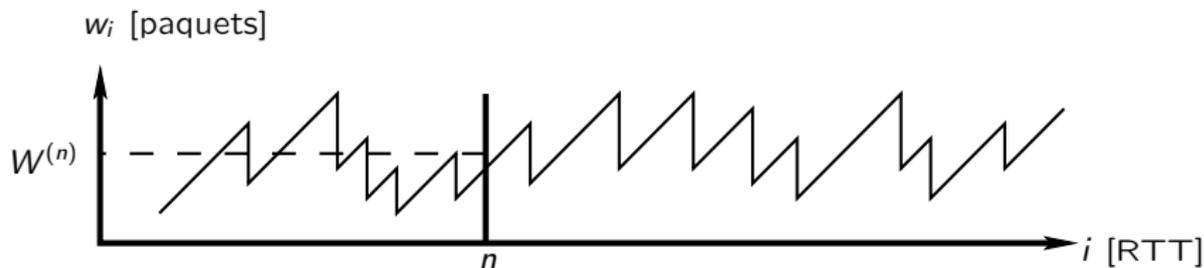
$$W^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.S.}} W^{(\infty)} = \mathbb{E} w_i \quad (\blacktriangleright \text{ Pertes Bernoulli : } w^{(\infty)} \sim \sqrt{\frac{3}{2\rho_0}})$$

Théorème de Ellis (GD) – En loi

$$\mathbb{P} \left(W^{(n)} \simeq \omega \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp(n \cdot f(\omega))$$

$f(\omega) \leq 0$: spectre des grandes déviations, invariant avec n

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



Théorème de Birkhoff – Pour presque toute réalisation

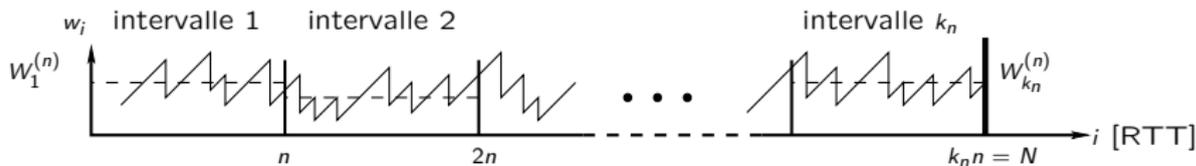
$$W^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.S.}} W^{(\infty)} = \mathbb{E} w_i \quad (\blacktriangleright \text{ Pertes Bernoulli : } w^{(\infty)} \sim \sqrt{\frac{3}{2\rho_0}})$$

Théorème de Ellis (GD) – En loi

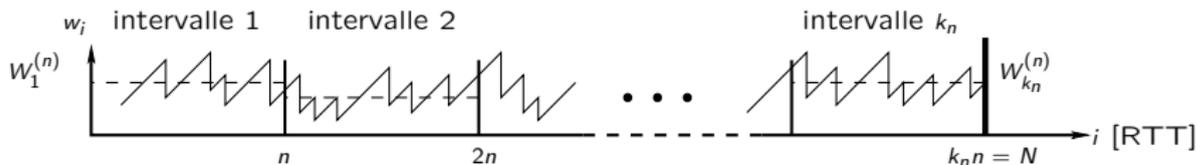
$$\mathbb{P} \left(W^{(n)} \simeq \omega \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp(n \cdot f(\omega))$$

$f(\omega) \leq 0$: spectre des grandes déviations, invariant avec n

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP

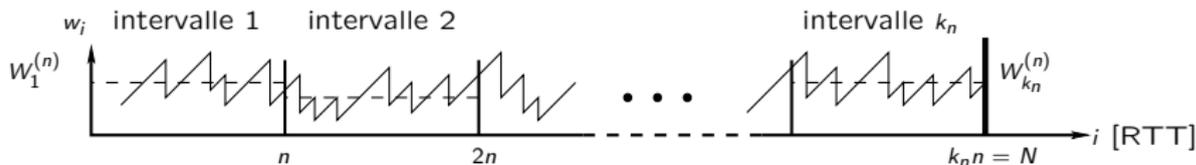


Théorème ergodique des grandes déviations [PG, Loiseau et al.]

Pour une valeur de ω donnée, si $k_n \geq e^{-nf(\omega)}$, alors pour presque toute réalisation et p.s.

$$\frac{\#\{j \in \{1, \dots, k_n\} : W_j^{(n)} \simeq \omega\}}{k_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp(n \cdot f(\omega))$$

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



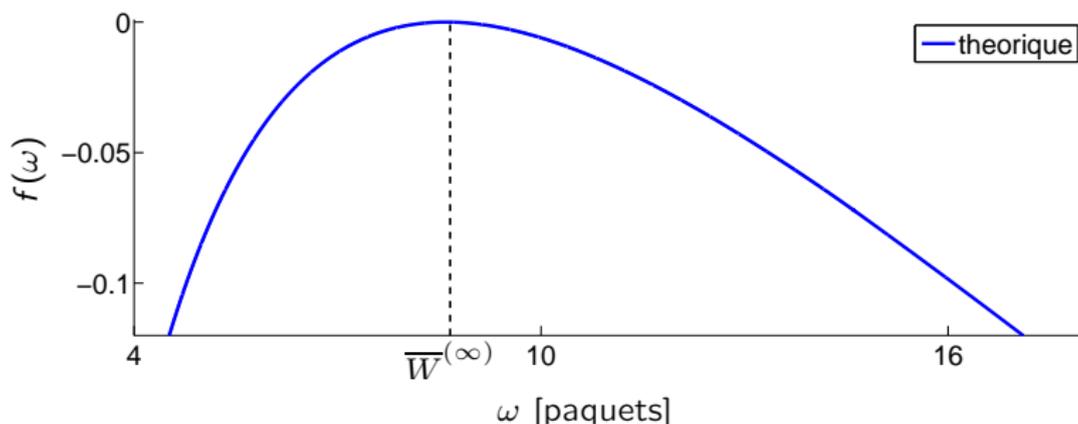
Théorème ergodique des grandes déviations [PG, Loiseau et al.]

Pour une valeur de ω donnée, si $k_n \geq e^{-nf(\omega)}$, alors pour presque toute réalisation et p.s.

$$\frac{\#\{j \in \{1, \dots, k_n\} : W_j^{(n)} \simeq \omega\}}{k_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp(n \cdot f(\omega))$$

- prix à payer : croissance exponentielle du nombre d'intervalles avec n
- $[\omega_{\min}(n), \omega_{\max}(n)]$ partie du spectre observable à l'échelle n
- théorie : $p(\cdot) \rightarrow Q \rightarrow f(\omega), \omega_{\min}, \omega_{\max}$
- pratique : $(W_i)_{i \leq N} \rightarrow$ distribution empirique observable

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



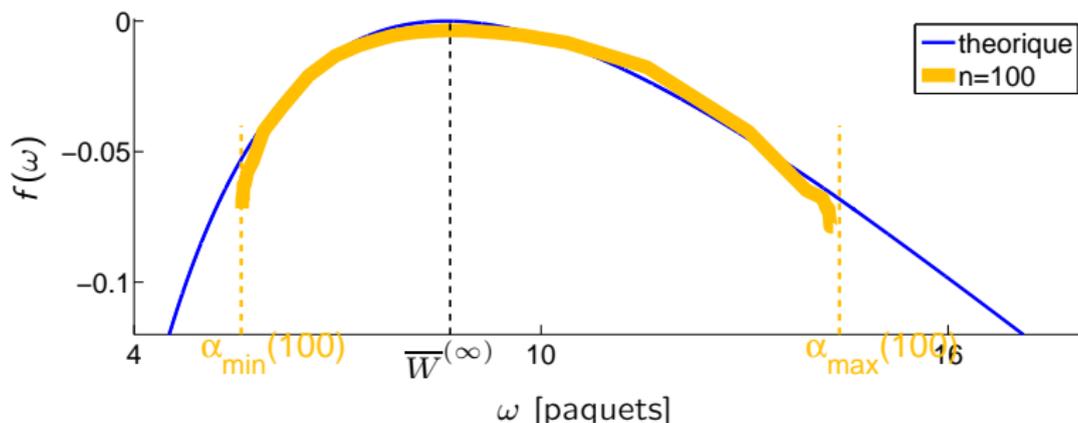
- Apex : moyenne presque sûre (formule de Padhye pour le cas Bernoulli)
- Superposition à différentes échelles : **invariance d'échelle**
- Lecture :

$n = 100$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-100 \times 0.01} = 0.37$

$n = 200$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-200 \times 0.01} = 0.14$

- **Information plus riche que la moyenne presque sûre**
- **Ouvertures intéressantes dans le dimensionnement des équipements réseaux et la gestion des applications**

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



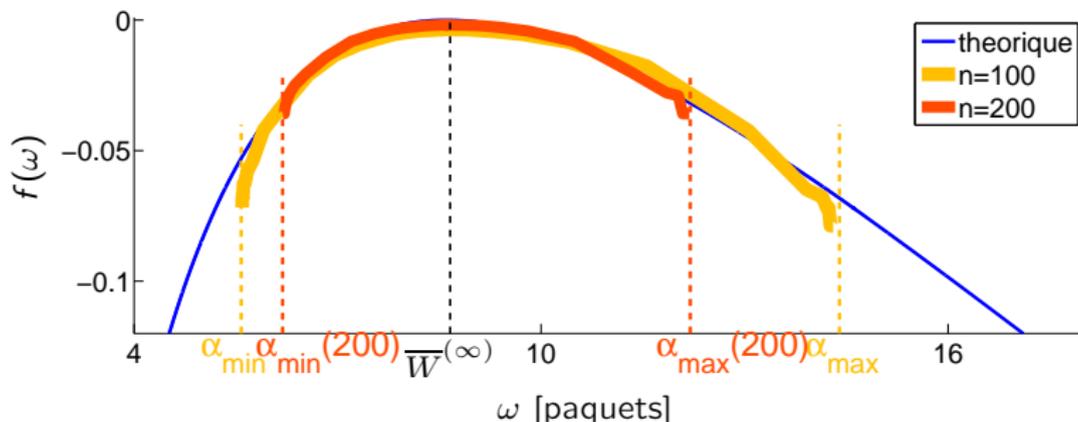
- Apex : moyenne presque sûre (formule de Padhye pour le cas Bernoulli)
- Superposition à différentes échelles : **invariance d'échelle**
- Lecture :

$n = 100$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-100 \times 0.01} = 0.37$

$n = 200$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-200 \times 0.01} = 0.14$

- Information plus riche que la moyenne presque sûre
- Ouvertures intéressantes dans le dimensionnement des équipements réseaux et la gestion des applications

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



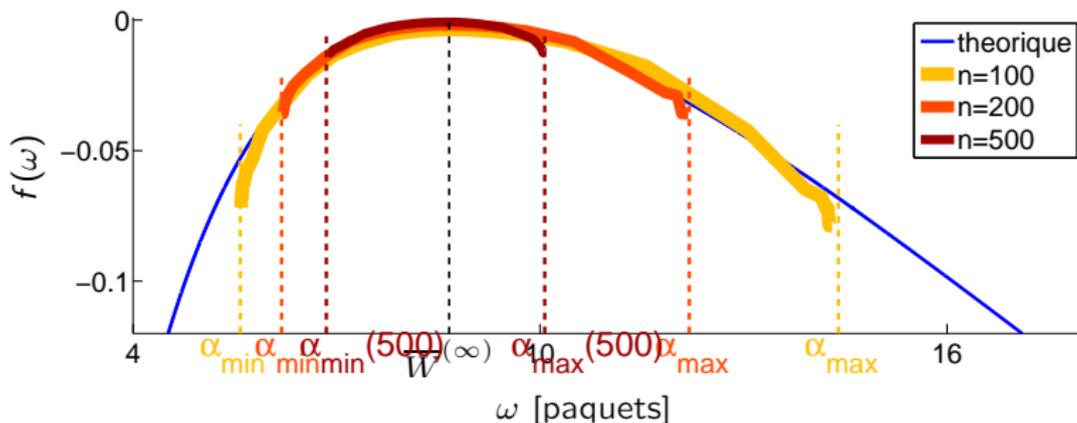
- Apex : moyenne presque sûre (formule de Padhye pour le cas Bernoulli)
- Superposition à différentes échelles : **invariance d'échelle**
- Lecture :

$n = 100$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-100 \times 0.01} = 0.37$

$n = 200$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-200 \times 0.01} = 0.14$

- Information plus riche que la moyenne presque sûre
- Ouvertures intéressantes dans le dimensionnement des équipements réseaux et la gestion des applications

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



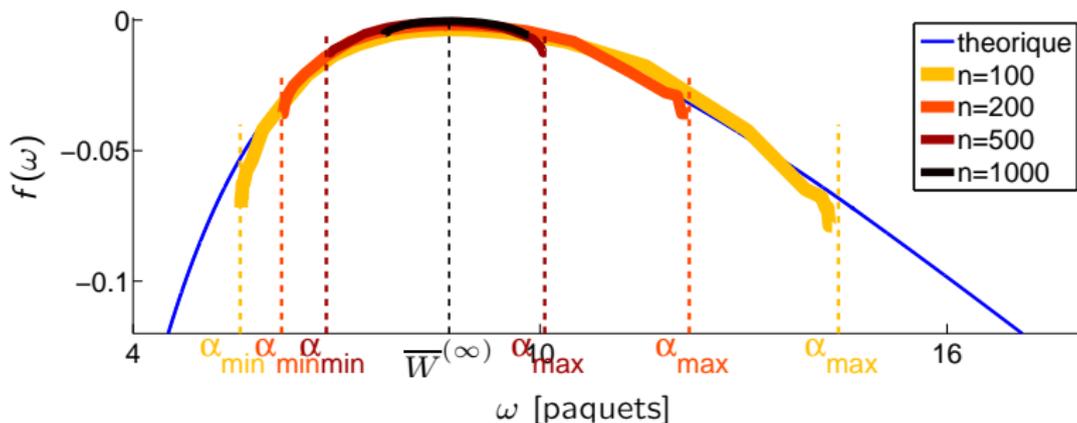
- Apex : moyenne presque sûre (formule de Padhye pour le cas Bernoulli)
- Superposition à différentes échelles : **invariance d'échelle**
- Lecture :

$n = 100$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-100 \times 0.01} = 0.37$

$n = 200$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-200 \times 0.01} = 0.14$

- Information plus riche que la moyenne presque sûre
- Ouvertures intéressantes dans le dimensionnement des équipements réseaux et la gestion des applications

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



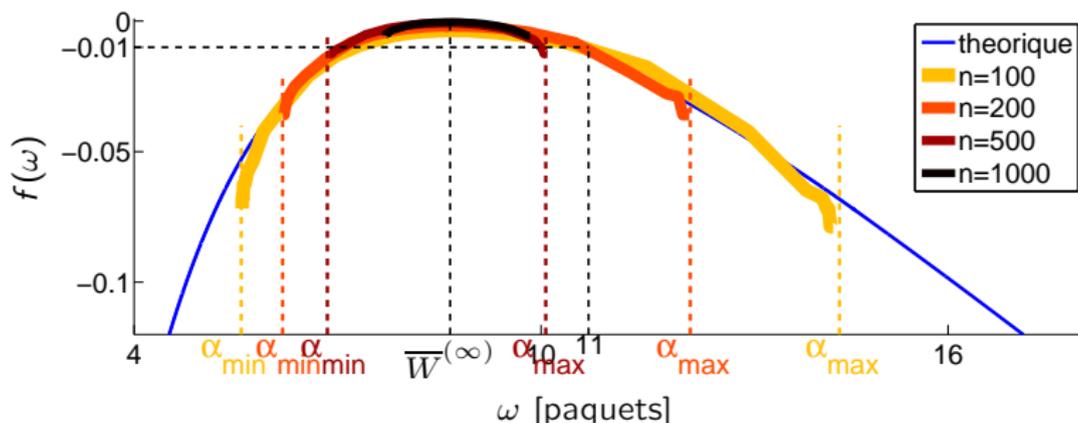
- Apex : moyenne presque sûre (formule de Padhye pour le cas Bernoulli)
- Superposition à différentes échelles : **invariance d'échelle**
- Lecture :

$n = 100$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-100 \times 0.01} = 0.37$

$n = 200$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-200 \times 0.01} = 0.14$

- Information plus riche que la moyenne presque sûre
- Ouvertures intéressantes dans le dimensionnement des équipements réseaux et la gestion des applications

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



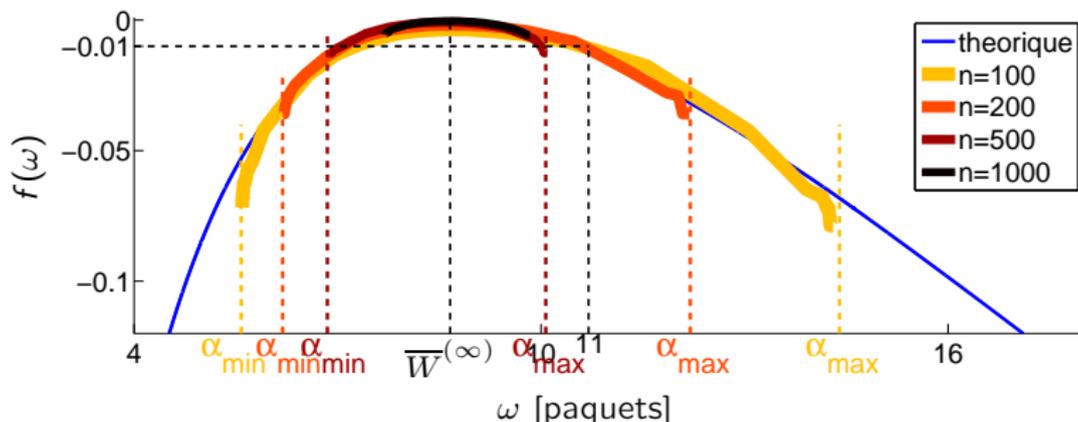
- Apex : moyenne presque sûre (formule de Padhye pour le cas Bernoulli)
- Superposition à différentes échelles : **invariance d'échelle**
- Lecture :

$n = 100$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-100 \times 0.01} = 0.37$

$n = 200$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-200 \times 0.01} = 0.14$

- Information plus riche que la moyenne presque sûre
- Ouvertures intéressantes dans le dimensionnement des équipements réseaux et la gestion des applications

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



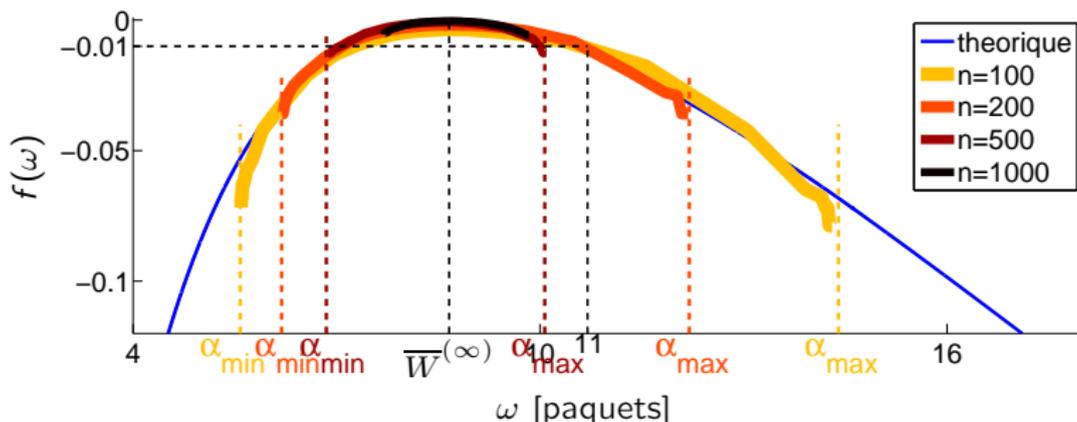
- Apex : moyenne presque sûre (formule de Padhye pour le cas Bernoulli)
- Superposition à différentes échelles : **invariance d'échelle**
- Lecture :

$n = 100$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-100 \times 0.01} = 0.37$

$n = 200$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-200 \times 0.01} = 0.14$

- **Information plus riche que la moyenne presque sûre**
- Ouvertures intéressantes dans le dimensionnement des équipements réseaux et la gestion des applications

Principe de Grandes Déviations sur un flot TCP



- Apex : moyenne presque sûre (formule de Padhye pour le cas Bernoulli)
- Superposition à différentes échelles : **invariance d'échelle**
- Lecture :

$n = 100$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-100 \times 0.01} = 0.37$

$n = 200$ proportion d'intervalles de moyenne ~ 11 : $e^{-200 \times 0.01} = 0.14$

- **Information plus riche que la moyenne presque sûre**
- **Ouvertures intéressantes dans le dimensionnement des équipements réseaux et la gestion des applications**

Conclusion : renforcer l'effort. . .

- analyse, modélisation, une meilleure compréhension des systèmes complexes
 - confronter les développements théoriques aux données réelles
 - renouveler les méthodes, innover dans les techniques de traitement de l'information
- renforcer les synergies entre Sciences de l'Information (traitement du signal, informatique)
et Sciences du Vivant
 - s'inspirer des mécanismes naturels (éprouvés!) pour concevoir les systèmes technologiques (internet du futur)
 - transposer à la représentation de phénomènes biologiques, des modèles génératifs conçus et testés sur des plates-formes expérimentales
- approche globale de la complexité (trouver des fondamentaux, principes universels)
 - origines de la multifractalité : non gaussianité, hétérogénéité, multi-échelle, taille des systèmes. . .
 - construire des outils génériques

Conclusion : renforcer l'effort...

- analyse, modélisation, une meilleure compréhension des systèmes complexes
 - confronter les développements théoriques aux données réelles
 - renouveler les méthodes, innover dans les techniques de traitement de l'information
- renforcer les synergies entre Sciences de l'Information (traitement du signal, informatique)
et Sciences du Vivant
 - s'inspirer des mécanismes naturels (éprouvés!) pour concevoir les systèmes technologiques (internet du futur)
 - transposer à la représentation de phénomènes biologiques, des modèles génératifs conçus et testés sur des plates-formes expérimentales
- approche globale de la complexité (trouver des fondamentaux, principes universels)
 - origines de la multifractalité : non gaussianité, hétérogénéité, multi-échelle, taille des systèmes...
 - construire des outils génériques

Conclusion : renforcer l'effort...

- analyse, modélisation, une meilleure compréhension des systèmes complexes
 - confronter les développements théoriques aux données réelles
 - renouveler les méthodes, innover dans les techniques de traitement de l'information
- renforcer les synergies entre Sciences de l'Information (traitement du signal, informatique)
et Sciences du Vivant
 - s'inspirer des mécanismes naturels (éprouvés!) pour concevoir les systèmes technologiques (internet du futur)
 - transposer à la représentation de phénomènes biologiques, des modèles génératifs conçus et testés sur des plates-formes expérimentales
- approche globale de la complexité (trouver des fondamentaux, principes universels)
 - origines de la multifractalité : non gaussianité, hétérogénéité, multi-échelle, taille des systèmes. . .
 - construire des outils génériques

Conclusion : renforcer l'effort...

- analyse, modélisation, une meilleure compréhension des systèmes complexes
 - confronter les développements théoriques aux données réelles
 - renouveler les méthodes, innover dans les techniques de traitement de l'information
- renforcer les synergies entre Sciences de l'Information (traitement du signal, informatique)
et Sciences du Vivant
 - s'inspirer des mécanismes naturels (éprouvés!) pour concevoir les systèmes technologiques (internet du futur)
 - transposer à la représentation de phénomènes biologiques, des modèles génératifs conçus et testés sur des plates-formes expérimentales
- approche globale de la complexité (trouver des fondamentaux, principes universels)
 - origines de la multifractalité : non gaussianité, hétérogénéité, multi-échelle, taille des systèmes. . .
 - construire des outils génériques

