# M2 SC – Usages du hasard Bootstrap, illustrations

#### **Pierre BORGNAT**

CNRS, Équipe Sisyphe (Signaux, Systèmes and Physique) Laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon, Université de Lyon





## Estimation d'un biais, cas de la variance

Gauche : estimateur biaisé; droite : non biaisé X gaussien, n = 5; B = 1000; MC = 1000



moyenne du biais -4.94e-4 (pour 0) et -0.1861 (à comparer à 2)

・ロット (雪) (日) (日)

#### Intervalle de confiance, cas de la moyenne

*X* gaussien (10,25), n = 10 et moyenne empirique  $\hat{\mu} = 9.946$ x = (-2.41, 4.86, 6.06, 9.11, 10.20, 12.81, 13.17, 14.10, 15.77, 15.79)



B = 100; IC à 95% = [6.27, 13.19] à comparer au théorique [6.85, 13.05]. Graphe : comparaison à une distrib. normale de moyenne 10, variance 25.

#### Intervalle de confiance, cas de la moyenne

X non gaussien : student t-4; n = 10 (moyenne nulle, variance t/(t-2)



B = 100; IC à 95% = [-0.896, 0.902] (pas de valeur théorique). Graphe : comparaison à une estimation MC, 1000 répliques.

・ コット (雪) ( 小田) ( コット 日)

#### Illustration du Bootstrap par blocs



▲ロ▶▲圖▶▲≣▶▲≣▶ ≣ のQで

#### Recherche d'un maximum : ne marche pas bien !

x selon loi uniforme sur  $[0, \theta]$ ; maximum estimé  $\hat{\theta} = \max(X_1, ..., X_n)$  $\theta = 1; n = 50; B = 1000$ ; MLE donne  $\hat{\theta} = 0.9843$ .



ヘロマ ヘ動 マイロマー

# Estimation d'un modèle AR(1)

 $X_t + aX_{t-1} = Z_t$  (stationnaire, blanc, gaussien, centré) a = -0.6; n = 128; B = 1000



Comparaison à 1000 répliques MC.  $\hat{\sigma}$  de 0.0712 par BS, 0.0694 par MC, 0.0707 par MLE.

#### Exemple de réduction de bruit



200

## Exemple : analyse micro-Doppler



Sac

## Exemple : analyse micro-Doppler



# Sélection de modèle linéaire

		$\mathcal{N}(0,1)$			t <sub>3</sub>	
Model $\beta$	BS	AIC	MDL	BS	AIC	MDL
$(0, 0, b_2, b_3)$	100	91	98	99	89	98
$(0, b_1, b_2, b_3)$	0	5	1	1	5	1
$(b_0, 0, b_2, b_3)$	0	3	1	0	3	1
$(b_0, b_1, b_2, b_3)$	0	2	0	0	3	0

▲□▶▲圖▶▲≣▶▲≣▶ ▲■ のへ⊙

## Sélection de modèle AR

Méthode	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
BS	28.0	65.0	5.0	2.0
AIC	17.8	62.4	12.6	7.2
MDL	43.2	54.6	2.1	0.1

## Stabilisation de variance

Std du coefficient de corrélation sans stabilisation de variance



◆ロ▶★舂▶★≧▶★≧▶ 差 のなぐ

## Stabilisation de variance

Fonction stabilisatrice de variance



▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ ▲□▶ = 三 のへで

## Stabilisation de variance

Std du coeff de corrélation après stab. variance



#### Transformation de Fisher



・ コット (雪) ( 小田) ( コット 日)

# Bibliographie et sources

 Les images ont été empruntées aux ouvrages et articles suivants :

- A. Zoubir, R. Iskander, "Bootstrap techniques for Signal Processing", CUP, 2004

- A Zoubir, B. Boashash, "The Bootstrap and its Application in Signal Processing", IEEE - Signal Processing Magazine, p. 56, 1998

 - A. Zoubir, R. Iskander, "Bootstrap Methods and Applications : A Tutorial for the Signal Processing Practitioner" IEEE - Signal Processing Magazine 24(4), p. 10-19, 2007.

• Autres ouvrages de référence :

- Efron, B.; Tibshirani, R. (1993). An Introduction to the Bootstrap. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

- Efron, B. (1982). The jackknife, the bootstrap, and other resampling plans. 38. Society of Industrial and Applied Mathematics CBMS-NSF Monographs.