

DEA de physique statistique et phénomènes non linéaires

TURBULENCE ET STRUCTURES
COHÉRENTES :
UNE APPROCHE PAR LES VORTEX
DE LUNDGREN

Pierre BORGNAT
sous la direction de Patrick FLANDRIN et Olivier MICHEL
Laboratoire de physique de l'ENS Lyon

Avril-août 1999

Je tiens à remercier en premier lieu le laboratoire de physique de l'École Normale Supérieure de Lyon, en la personne de son directeur M. Patrick Oswald, de m'avoir accueilli dans ses murs pour mon stage de DEA. L'ambiance de travail mais aussi le simple cadre de vie y est très agréable.

Rien de ce travail n'aurait bien sûr été possible sans l'aide constante de mes deux directeurs de stage Patrick Flandrin et Olivier Michel qui, non contents de m'avoir proposé un sujet passionnant sur lequel beaucoup reste à faire, ont su guider mes recherches avec une grande disponibilité et toujours indiquer les points décisifs à exploiter. La poursuite de mon travail à leur côté s'annonce sous un vent favorable.

Je suis redevable de beaucoup de personnes au laboratoire pour leur accueil chaleureux et les remercie tous. Je ne peux manquer de citer particulièrement les discussions fréquentes avec Christophe Baudet dont la connaissance du sujet que j'ai abordé n'a eu d'égal que sa disponibilité et qui m'a aussi permis d'utiliser certains de ses programmes. Je n'ai malheureusement pas eu autant d'opportunité de discuter avec Pierre-Olivier Amblard puisqu'il est à Grenoble, cependant ses idées ont largement contribué à démarrer puis orienter mon travail.

Enfin, et un peu en marge du stage, ces quelques mois de recherche auraient été bien mornes sans quelques problèmes liés aux AMN... Un grand coup de chapeau à tous ceux qui ont passé une part non négligeable de leur temps à chercher des solutions.

Introduction

La compréhension du phénomène de turbulence dans les fluides a donné lieu à de nombreux travaux. Un ensemble d'études insiste sur la modélisation de ce que l'on observe car les équations de la dynamique des fluides elles-mêmes donnent lieu à des comportements très complexes qui nous échappent dans leur généralité et sont même difficiles à seulement calculer numériquement. Ces descriptions et modèles doivent bien sûr vérifier les contraintes existantes sur les flots turbulents : propriétés spectrales et statistiques, contraintes géométriques, équations de la dynamique des fluides, invariances des équations comme celle par changement d'échelle.

Les intérêts de ce type de démarche sont multiples. On peut mettre en place des descriptions approchées mais simples permettant des calculs analytiques ou bien ne nécessitant pas de recourir à des simulations numériques lourdes. Il est aussi possible, comme nous avons essayé de le faire, de relier au maximum les objets de base de la modélisation aux contraintes physiques et observées expérimentalement.

La question initiale est de savoir quelle classe de modélisation adopter. Les approches par la description des structures cohérentes du flot, principalement des vortex, en forment une première [52, 28] ; il faut savoir quels objets sont pertinents et si on peut décrire les fonctions spectrales en combinant ces objets.

Les concepts de fractal, visant d'abord à satisfaire les invariances et les propriétés spectrales ont eu pour leur part un certain succès ; le formalisme multifractal en est un [24, 63]. On sait que ce modèle a ses limites, en particulier quant à ses connections avec une vision plus géométrique et issue des équations de la dynamique de l'écoulement. Il ne permet à l'origine qu'une interprétation statistique.

Des auteurs [29] ont alors proposé de s'intéresser à des signaux dont le comportement singulier comporterait en soi une structure plus riche : des singularités oscillantes ou divergentes.

Nous avons essayé de faire le point sur les résultats multiples et épars dans la littérature concernant ces différentes approches qui pourraient se rencontrer : les singularités oscillantes qui mettent une structure dans des signaux fractals d'une part ; les modèles de vortex dont on tire une description statistique de la turbulence ; la possibilité d'un comportement singulier de la vitesse. La confrontation des résultats peut donner naissance à de nouveaux modèles plus pertinents. Au final nous verrons qu'une image pertinente des vortex se dégage de ses études, celle d'objets filamentaires possédant une structure transverse complexe qui semble plus intéressante que le cœur, mais qu'il reste des points obscurs quant aux structures que l'on doit supposer.

Dans un article de 1982 [38] Lundgren a proposé une solution des équations de la dynamique qui a l'avantage d'être assez générale et d'être en accord avec les propriétés souhaitées des structures cohérentes. Un parcours des propriétés connues de ce modèle est un préliminaire indispensable. La caractéristique marquante de ce modèle est que ce sont les bras spiralés et non le cœur qui donnent naissance au spectre attendu. Ensuite nous avons porté nos efforts sur la possibilité de modéliser des mesures de vitesse à partir de ces vortex. Cela pose deux questions majeures : quels sont les objets élémentaires et leurs paramètres ; quelles sont les propriétés statistiques et les interactions du gaz d'objet ainsi constitué ?

Enfin, comme un modèle n'a de sens que s'il contribue à la compréhension de la turbulence, le souci est constant d'essayer de développer des outils d'analyse pour confronter le modèle aux signaux expérimentaux. L'objectif est alors double : savoir décrire les paramètres du signal dans le cadre du modèle ; être capable de décider si le modèle est adéquat à la description de la mesure... Sans avoir rempli totalement cet objectif, nous avons actuellement déjà testé à chaque opportunité les outils existants par ailleurs afin de déterminer le degré de ressemblance entre les vortex observés et différentes simplifications proposées.

Chapitre 1

Description à base de structures cohérentes de signaux de turbulence ?

1.1 Décrire la turbulence

Un défi majeur en turbulence reste de savoir aller au-delà de la théorie de **Kolmogorov 41** (K41) [24, 2, 4] qui décrit les premières propriétés statistiques d'un champ de vitesse : son spectre d'énergie en particulier qui est trouvé en $k^{-5/3}$. Pour obtenir ce premier résultat, on suppose qu'aux petites échelles toutes les symétries vérifiées par l'équation de Navier-Stokes¹ sont rétablies : homogénéité, isotropie, stationnarité et invariance d'échelle. Si on admet que à la limite des faibles viscosités la dissipation reste finie et qu'on accepte un seul exposant d'invariance d'échelle, on arrive au résultat de K41 pour les fonctions de structure d'ordre p , pour une certaine zone d'échelle l où la viscosité est négligeable, appelée zone inertielle :

$$S_p(l) \hat{=} \langle \delta u_{//}(l)^p \rangle = C_p \epsilon^{p/3} l^{-p/3}. \quad (1.1)$$

ϵ est la dissipation moyenne, $\delta u_{//}(l)$ est l'accroissement longitudinal de vitesse sur une distance l , C_p sont des constantes universelles et $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne d'ensemble.

Il est connu que ce résultat est mis en défaut par le phénomène d'**intermittence** [24], dès qu'on s'intéresse aux moments d'ordre 4 ou plus. L'intermittence est ce qui décrit l'impression de voir des régions d'activité intense dans un signal de turbulence, entrecoupées de zones plus calmes. Le résultat expérimental qui traduit cette impression est la distribution non gaussienne des densités de probabilités des incréments de vitesse, caractère d'autant plus marqué que l'on s'intéresse aux petites échelles. La deuxième conséquence est que les exposants pour les fonctions de structure d'ordre supérieur à trois sont inférieurs à ceux prédits par K41.

Il existe principalement deux approches pour rendre compte de ces propriétés d'intermittence [2].

- On peut modifier les hypothèses statistiques de K41 afin de prendre en compte la brisure de certaines symétries, usuellement celles d'invariance d'échelle et/ou d'invariance par translation temporelle. Plusieurs modèles ont été construits de cette manière dont le modèle log-normal de Kolmogorov et Obukhov, le modèle multifractal basé sur des idées de Mandelbrot et développé par Frisch et Parisi, et le modèle de cascade de Castaing [24].
- Une autre voie s'intéresse à la structure réelle des flots turbulents et aux zones d'où semblent émerger des structures cohérentes : ce sont principalement les endroits de forte

1. dénommée (NS) par la suite

vorticité, qui semblent se regrouper sous la forme grossière de filaments. Une modélisation de ces zones qui brisent les symétries de (NS) à petite échelle et une étude de leurs propriétés statistiques pourraient donner des résultats, tenant compte de l’intermittence, sur les propriétés statistiques du flot [52].

Ces deux démarches ne sont pas incompatibles et doivent pouvoir s’enrichir l’une l’autre. Le modèle multifractal reformulé par She et Lévéque [61] tend justement à prendre en compte des structures dissipatives cohérentes prenant la forme de filaments (objets de dimension 1) dans le but de déterminer la loi des exposants de similitude des fonctions de structure. Il nous semble qu’en se basant plus précisément sur des solutions existantes de (NS), on doit pouvoir contribuer à la modélisation et à l’étude des propriétés des signaux de turbulence mesurés.

1.2 Recherche de comportements significatifs

1.2.1 Par l’étude de la dynamique des fluides

Une contribution majeure à l’analyse de la turbulence serait l’obtention d’une solution générale aux équations de la mécanique des fluides pour le champ de vitesse \vec{u} , celle de Navier-Stokes et celle d’incompressibilité [52].

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} &= - \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0.\end{aligned}\tag{1.2}$$

En l’absence d’un tel résultat à l’heure actuelle, ou même simplement de la connaissance des propriétés d’une telle solution, nous nous adressons aux expériences et aux simulations numériques pour savoir quelles structures significatives semblent exister de manière générale dans des écoulements turbulents. Ce sont les structures cohérentes que nous avons mentionnées. Implicitement on suppose qu’elles ont peut-être un comportement, une dynamique ou une organisation qui seraient universels et expliqueraient certaines propriétés observées des signaux mesurés en turbulence.

Les vortex. Dans de nombreuses simulations numériques directes (voir par exemple [60, 12, 13, 71, 32] et une revue dans [33, 24]) on a observé l’existence de zones de fortes vorticités qui occupent une partie de l’espace. De plus elles semblent se regrouper sur des structures en forme de tube ou de filament. Ces structures ne semblent pas des artefacts car elles ont une durée de vie assez importante à l’échelle du temps caractéristique de la dynamique. Elles obéissent à une dynamique de déformation lente jusqu’à leur disparition qui se produit en un temps court [13]. Ces objets sont étirés par le flot environnant. Paradoxalement, alors que l’étirement moyen mesuré semble posséder deux valeurs propres positives et une négative dans un rapport usuel de 3 : 1 : -4 [27, 66], ce qui donnerait naissance simplement à des feuillets de vorticité, ce sont des tubes qui sont plutôt observés. En fait cet étirement n’est pas exactement celui ressenti par l’objet : une partie est créée par l’objet lui-même qui est souvent localement 2D donc ne subit pas l’effet de son propre champ de déformation puisque ce dernier est alors orthogonal à la vorticité². Déjà Kuo et Corrsin [36] avaient montré que des structures en forme de tube étaient des candidats plus pertinents que des feuillets de vorticité. Moffatt *et al.* [43] ont montré de plus que des filaments de vorticité pouvaient survivre en fait dans des zones d’étirement biaxial un temps long par rapport au temps d’évolution sous le champs de déformation du fait de leur

2. Nous verrons au chapitre 2 que le terme $\vec{\omega} \cdot \vec{S}$, où \vec{S} est le tenseur de déformation, est responsable de la non-linéarité et de l’augmentation de la vorticité $\vec{\omega}$.

propre rotation ; une fois créés dans une zone d'étirement axial, ils peuvent migrer vers les zones biaxiales qui peuvent être majoritaires.

Des expériences ont été menées pour étudier l'existence et l'importance de ces filaments de vorticité dans des écoulements turbulents réels [57, 19]. Une propriété importante est l'alignement fréquent de la vorticité avec les directions propres de déformation [7, 62]. Douady *et al.* [20] ont visualisé de telles zones en ajoutant des bulles au fluide qui se concentrent dans les zones de faible pression, qui sont justement celles de forte vorticité. Ils ont mis en évidence une dynamique complexe de ces filaments qui sont étirés et comprimés et enfin se tordent avant d'être détruits, sauf pour les plus intenses qui finissent en large zone de vorticité se dissipant peu à peu. Nous appellerons **vortex** ces structures qui sont des zones à forte vorticité organisée, confinée dans l'espace (idéalement entourée d'une zone à vorticité nulle).

Au final, l'image des vortex communément admise [64, 24] est celle de filaments d'épaisseur se situant entre l'échelle de Kolmogorov³ η et l'échelle de Taylor⁴ λ . Leur longueur est plus grande, atteignant l'échelle de distance intégrale. Enfin ils sont faiblement courbés ce qui peut laisser supposer une structure locale quasi bidimensionnelle. Nous reviendrons sur ce point. Actuellement personne n'a mis en évidence de façon certaine d'autres objets organisés qui auraient une dynamique particulière. Les seules structures cohérentes que nous étudions sont donc ces filaments de vorticité qui semblent décrire en première approche les vortex décelables dans des écoulements lors d'expériences.

Influence des vortex. Leur importance est loin d'être établie ou élucidée [66]. En étudiant ces structures, Belin *et al.* [7] ont vu qu'elles contribuent peu à la dissipation bien qu'elles soient liées à l'intermittence [72]. Moffatt *et al.* [43] ont eux-aussi montré que les zones de fortes dissipation n'étaient que faiblement corrélées aux zones de forte vorticité. Abry *et al.* [1, 2] ont même prouvé qu'enlever du signal les  v nements de basse pression associés *a priori* aux filaments de vorticité, ne supprimait pas le comportement intermittent des fonctions de structure ; ce résultat a été confirmé par Arnéodo *et al.* [53], qui ont retrouvé par MMT0⁵ les propriétés multifractales d'un signal de turbulence après suppression par une méthode analogue des filaments de vorticité. Une étude plus récente montre que les vortex détectés contribuent principalement à la vitesse à laquelle la cascade d'énergie, telle que la décrit le modèle de Castaing, se développe [16]. La seule réserve que l'on peut apporter à ces résultats est que les études portaient sur des vortex symétriques, ayant globalement la structure de vortex de Burgers [15] et étant assez rares (temps moyen entre deux filaments : $\Delta t \simeq 15T_{rot}$ ⁶), qui décrivent les vortex importants mais peut-être pas soit des vortex non axisymétriques, soit une structure plus fine et transitoire des zones de vorticité que rien n'interdit de pouvoir modéliser l'intermittence et faire partie de ce que l'on classe souvent dans le "fond" de la mesure de vitesse (voir les *micro-worms* suggérés dans [72]).

L'effet de l'existence des structures cohérentes de vorticité sur les propriétés statistiques de la vitesse reste donc mal comprises. L'approche par des modèles s'appuyant sur ces objets est donc profitable, que cela soit pour la qualifier ou la disqualifier en tant que démarche intéressante.

Les premiers modèles construits à partir de vortex. Il existe plusieurs tentatives [65, 64, 18] assez anciennes de décrire les propriétés statistiques de la turbulence en supposant qu'un ensemble de structures de vorticité cohérentes domine le comportement. Dans ces approches on suppose que l'on peut modéliser le comportement aux petites échelles de la turbulence par une collection de solutions locales de (NS) qui sont censées décrire les objets de vorticité qui se

3. Définie plus loin.

4.  chelle de distance associée aux fluctuations de vitesse.

5. Méthode des Maxima de la Transformée en Ondelettes.

6. T_{rot} est l'échelle de temps intégrale, égale à la période de rotation des disques mettant en mouvement le fluide ; la géométrie de l'expérience est celle de von K rm n avec des disques contra-rotatifs [1, 2].

trouvent dans le flot. On considère alors un ensemble de ces objets orientés de manière aléatoire et isotrope dans l'espace et on moyenne correctement le spectre de chaque structure pour calculer le spectre de l'ensemble. Aux petites échelles l'isotropie est brisée du simple fait de l'existence du vortex ; en moyenne on suppose une distribution isotrope. Une hypothèse assez forte de ces modèles est l'absence d'interaction explicite entre ces objets. Le travail de Tennekens [64] insiste sur l'image simple que l'on a donnée des filaments ; ils seraient étirés par des zones plus larges de vorticité non nulle mais moins concentrée (les *eddies*) de taille λ . Il calcule ensuite les moments d'ordre 3 et 4.

La première approche de Townsend [65] montre qu'un ensemble de vortex en tubes axisymétriques de type de Burgers⁷ conduit à un spectre d'énergie :

$$E_0(k) \sim \epsilon^{1/2} \nu^{1/2} k^{-1} \exp(-cte \eta^2 k^2), \quad (1.3)$$

où k est le module du vecteur d'onde et η est l'échelle de longueur de Kolmogorov $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$. Si on suit plutôt le modèle de Corrsin [18] contruit à partir d'un ensemble de feuillets de vorticité, on arrive à un spectre [49] :

$$E(k) \propto k^{-2} \exp(-2\eta^2 k^2). \quad (1.4)$$

Ces résultats donnent l'idée qu'une structure intermédiaire entre un feuillet de vorticité et un vortex axisymétrique de type Burgers pourrait avoir le comportement spectral attendu par K41 : $E(k) \propto k^{-5/3}$, et être donc pertinente. De plus il semble alors intéressant de ne pas se limiter à des structures de géométrie simple (ligne ou plan) et d'étendre les recherches à des objets qui, étirés comme un filament, auraient une structure transverse plus riche dans le plan orthogonal à la direction de ce filament.

1.2.2 Nécessité d'un comportement singulier de la vitesse

L'étude statistique du champ de vitesse d'un flot turbulent, en se limitant même aux résultats de K41, a une première conséquence non négligeable sur les propriétés topologiques de ce flot [29]. Le spectre unidimensionnel d'énergie doit en effet vérifier la célèbre loi des $-5/3$:

$$E(k) = \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \text{fct}(\eta k) ; \quad (1.5)$$

fct désigne une fonction qui tend vers une constante dans la zone inertielle pour $k\eta \ll 1$, et rend compte de l'influence de la dissipation à petite échelle. L'obtention d'un spectre en loi de puissance non entière n'est pas courant. C'est un comportement que l'on retrouve pour des signaux complexes comme des fonctions fractales [22].   l'aide du théorème suivant [58] sur les transformées de Fourier, on montre qu'il existe une limite   la régularité du champ de vitesse.

Si $f(x)$ est une fonction continuellement dérivable jusqu'à l'ordre $p - 1$, et que f et ses dérivées jusqu'à cet ordre sont sommables, alors ses coefficients de Fourier a_k vérifient :

$$a_k = \mathcal{O}(k^{-p}) \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow \infty$$

et son spectre⁸ :

$$E(k) = \mathcal{O}(k^{-2p}) \quad \text{quand} \quad k \longrightarrow \infty.$$

La contrainte imposée alors par K41, comme $E(k) \propto k^{-5/3}$, est que l'ordre de régularité maximum du champ de vitesse u est $p = 5/6$ qui est non entier. Cette dernière propriété interdit que l'on ait simplement un ensemble dénombrable de discontinuités du signal ou d'une de ses dérivées. On retrouve ce type de loi de puissance avec p non entier pour des fonctions en loi

7. Nous reviendrons en détail dans la partie suivante sur les équations pour la vorticité et les solutions exactes existantes.

8. si f est dans \mathcal{L}^2

de puissance ou des fonctions fractales par exemples mais il y a plusieurs manières d'avoir un comportement singulier et de contourner ainsi le théorème. Toute la difficulté d'interprétation vient de ce qu'il n'existe pas de réciproque simple au théorème.

Nous passons rapidement en revue ces comportements [41, 29] :

1. Des singularités de type Hölder⁹ ont un spectre de Fourier en loi de puissance dont l'exposant peut ne pas être entier. Si h est l'exposant de Hölder le spectre d'énergie attendu pour un signal unidimensionnel est :

$$E(k) \sim k^{-2-2h}.$$

Dans cette catégorie on range les singularités explosives (exposant $h < 0$). On suppose ici que chaque singularité doit donner lieu au comportement spectral de manière isolée.

2. Accumulation de discontinuités ou de singularités hölderiennes sur des ensembles non dénombrables et généralement denses. Elles peuvent vivre sur des ensembles fractals, comme dans le cas du modèle multifractal. Dans ce cas il n'est presque pas possible de séparer les singularités et on fait appel à une étude statistique pour mesurer le comportement spectral exact [4, 24].
3. Un arrangement régulier de telles singularités simples ; la loi en puissance émerge de la structure spatiale de répétition et non des singularités elles-mêmes.
4. On peut enfin avoir des singularités avec une structure interne [30] qui présentent des discontinuités qui s'accroissent vers certains points donnés, ou une infinité d'oscillations qui permettent à la singularité de contribuer à toutes les échelles de longueur de manière non triviale. Des fonctions comme $\sin(x^{-t})$ pour $t > 0$ ou $x^{\alpha-1}$ avec α complexe sont des candidats possibles.

Ils sont illustrés figure 1.1.

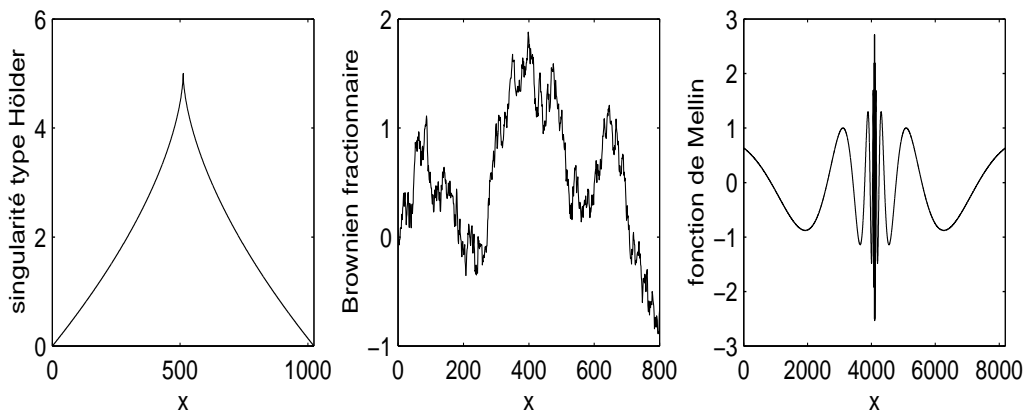


FIG. 1.1 – Différents types de singularités, de gauche à droite : en “cusp” ($h = 0.4$), singularité isolée (cas 1) ; brownien fractionnaire (cas 2) ; fonction de Mellin (cas 4).

L'idée que l'étude de structures cohérentes issues de (NS) permettrait de nous renseigner sur les singularités à privilégier, nous conduit à rapprocher les vortex qui ont une structure interne

9. $u(x - x_0) \sim |x - x_0|^h$, avec h exposant de singularité réel.

plus complexe qu'un vortex de Burgers ou qu'un feuillet (puisque ces deux cas ne conduisent pas à de bonnes modélisations) des singularités du dernier type ayant aussi une structure interne compliquée. Nous étudierons principalement celles-ci, que nous dénommons **singularités oscillantes**.

Qu'en est-il des singularités explosives?

Avant de passer aux fonctions singulières avec une structure interne que nous avons privilégiées, nous résumons quelques connaissances à l'heure actuelle sur la possibilité de singularités du premier type, des solutions de (NS). Quant au deuxième type on ne sait pas relier simplement ces descriptions statistiques (en terme de fractal) à des propriétés effectives qu'aurait l'écoulement du fluide. On peut consulter l'article de revue [63] à ce sujet dont les conclusions sur les limites de l'approche purement fractale sont toujours d'actualité. En particulier il est difficile de tirer des conséquences du fait que les interfaces dans un fluide turbulent semblent fractales, de dimension de capacité proche de 2.4.

Un comportement spectral du champ de vitesse en loi de puissance induit si on veut le décrire par un ensemble de singularités hölderiennes isolées :

$$E(k) \sim k^{-2p} \implies u \sim x^{p-1}. \quad (1.6)$$

Ainsi selon K41, $p = 5/6$ et la vitesse doit diverger à l'approche de ces singularités.

On doit ainsi étudier la possibilité de naissance de divergences en un temps fini des équations inviscides d'Euler. Remarquons que la viscosité détruit toute divergence à petite échelle et interdit d'avoir physiquement un champ infini qui ne correspond à rien. Il n'existe pas de résultats complets sur la question. Voir pour une revue l'article de Majda [40].

À deux dimensions il a été prouvé que, partant d'une solution initialement régulière et d'énergie finie, il existe une solution régulière à tout instant, écartant donc la possibilité de divergences [40]. Cependant Farge et Holschneider [23] ont avancé comme argument que dans les simulations numériques la discrétisation nécessaire induit une condition initiale non régulière. Ils montrent alors que l'existence d'un ensemble de quasi-singularités telles que la vorticit e autour du c oeur  evolue en $\omega \sim r^\alpha$, conduit naturellement au spectre attendu en turbulence bidimensionnelle pour $\alpha = -1/2$, ce qui est en accord avec les simulations numériques de Benzi [8]. En somme ils proposent un mod ele basée sur des singularit es isol ees, divergentes en pointe (*cusp*).

Des travaux math ematiques ont cherchée une r eponse pour le cas tridimensionnel sans succ es g en eral actuellement. Bhattacharjee, Wang et Ng [10, 11] ont proposée une condition initiale (C.I.) qui  evolue vers une singularit e en temps fini. Il semble que ce r esultat soit confirmée par des simulations num eriques. Cependant deux objections font que le r esultat n'est pas enti erement acceptée. La premi ere est que la C.I. est dans un espace infini donc est d' energie infinie m eme si localement celle-ci reste born ee; entre autre, les conditions aux bords ne sont pas prises en compte. Ensuite la configuration (un point de vitesse nulle entourée par deux points sym etriques de vorticit e nulle) est particuli ere et peut ne pas  etre r ealiste. Ils font cependant une connection int eressante avec le mod ele de vortex spiralée de Lundgren en proposant que la viscosit e puisse stopper l'apparition de la divergence en temps fini mais que alors la configuration spiral ee adopt ee par le champ de vitesse  evolue selon ce qu'a  etudi e Lundgren (voir chapitre suivant).

Constantin *et al.* [17] ont choisi d' etudier les contraintes impos ees au champ de vitesse pour qu'il n'y ait pas de divergence en temps fini. Ils semblent trouver que l'alignement n ecessaire  a un comportement explosif ne se produit pas. Ils ont basée leur  etude sur la dynamique de l'alignement du champ de vorticit e avec le champ d' etirement puisque l'analyse classique montre

que c'est celui-ci qui est responsable d'une éventuelle explosion du champ de vorticité. Le scénario élémentaire en serait l'existence d'un tube de vorticité ayant une légère courbure ce qui lui permet d'engendrer un champ de déformation qui étire sa propre vorticité, l'amplifiant ainsi.

Les résultats des simulations numériques sont eux assez divers. On peut consulter une revue importante dans Grauer [27]. Il semble qu'une singularité en temps fini aient été observés selon certains articles.

Une étude plus complète de ces résultats délicats à suivre sera nécessaire dans un avenir proche. Elle le sera d'autant plus à long terme qu'un comportement divergent et un comportement oscillant s'influencent l'un l'autre quand on veut mesurer les propriétés statistiques finales (voir l'article de Arnéodo *et al.* [5]).

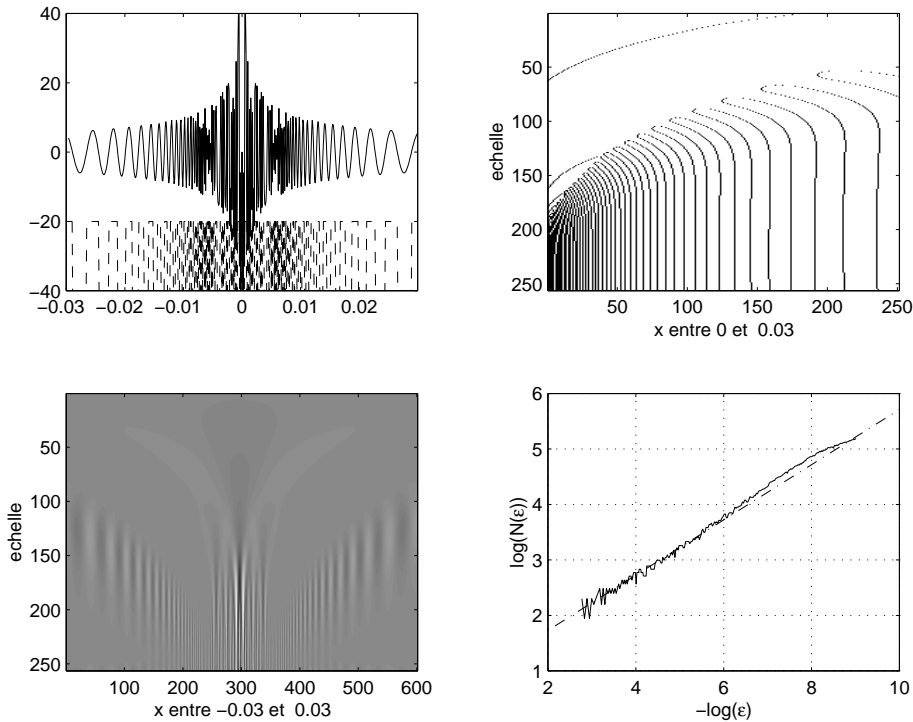


FIG. 1.2 – Mesure de D_E par la méthode de Vassilicos pour une singularité du type (1.7), avec $s = -0.5$, $t = 1$. Le signal est en haut à gauche (superposé au signal logique associé), en-dessous se trouve une portion de la transformée en ondelettes. En haut à droite on a en fonction de l'échelle la segmentation du signal. Notons que les lignes se concentrent vers le point de singularité, reproduisant dans la TO la structure. En bas se trouve $N(\epsilon)$ en digramme log-log ; on y a superposé la régression linéaire, de pente 0.5 (précision ± 0.05).

1.3 Singularités oscillantes et structures cohérentes

Un autre type de singularités, qui possède une structure interne complexe, a été en partie étudié par Vassilicos et Hunt ([67, 29] et les articles suivants de ces auteurs), Gilbert et Moffat en particulier. Nous avons aussi principalement étudié des singularités oscillantes en débutant par les résultats d j   obtenus par ces chercheurs.

Où l'on parle de spirales. Une question préliminaire à la modélisation par des singularités oscillantes est celle du lien avec les structures cohérentes. D'un côté on s'intéresse à des fonc-

tions ayant des propriétés statistiques ou topologiques précises qui permettent de reconstituer ou d'analyser des signaux mesurés. De l'autre on étudie des solutions de (NS) qui semblent décrire des objets organisés. En supposant une structure principalement filamentaire comme précédemment, il reste à déterminer l'organisation de ces objets dans le plan transverse. On suppose naturellement qu'une coupe à travers celle-ci doit permettre d'obtenir comme mesure (sur une sonde de vitesse par exemple) un signal semblable aux fonctions étudiées. Quels objets peuvent donner lieu à ces fonctions ?

Des candidats adaptés en dynamique des fluides sont des objets spiralés que l'on sait exister dans des écoulements. Des spirales de vorticité peuvent naître par des instabilités de type Kelvin-Helmholtz [6, 37] : toute perturbation d'un plan de discontinuité de vitesse (*ie.* un feuillet de vorticité) s'accroît et donne lieu à un enroulement autour du point d'inflexion initial de la déformation. On obtient alors un feuillet spiralé de vorticité. Moffatt [42] et Gilbert [25] ont aussi beaucoup étudié les structures spiralées dans les écoulements de fluide. Nous montrerons les liens possibles entre les fonctions oscillantes et ces vortex spiralés.

1.3.1 Approche de Vassilicos et Hunt

Partant de ce que les signaux de turbulence ont une allure fractale, sans avoir cependant un comportement aussi aléatoire qu'une fonction fractale habituelle (comme un signal Brownien fractionnaire), ils ont recherché si des structures dans le flot pouvaient donner lieu à des comportements en singularité oscillante [29]. En particulier il faut pouvoir décrire les zones d'intermittence. Ils se sont explicitement intéressés à des singularités qui seraient auto-similaires, pour refléter les propriétés de $E(k)$ et l'invariance par changement d'échelle de (NS) pour une viscosité négligeable, et ayant une dimension fractale non nulle afin de retrouver le comportement fractal des signaux mesurés. Ainsi ils ont cherché des objets qui brisent l'homogénéïté (puisque cohérents) mais gardant l'auto-similitude autour d'un point. En cela les objets qu'ils regardent sont localement auto-similaires alors que les fractals ou les descriptions recherchés à partir du formalisme multifractal sont globalement auto-similaires. Les premiers sont dits K -fractal et les deuxièmes H -fractal [67].

Remarquons tout d'abord que la méthode d'analyse par les maxima de la transformée en ondelettes largement utilisée dans le cadre du formalisme multifractal ou simplement pour mesurer les exposants de Hölder de singularités [4], ne décrit pas correctement les singularités oscillantes. On peut uniquement essayer de construire une méthode prenant en compte l'effet d'oscillations de manière statistique [5]. Il reste à trouver d'autres moyens pour caractériser une singularité ou pour conserver les informations sur la structure spatiale au cours de l'analyse.

Signaux   tudi  s

La fonction modèle de l'étude de Vassilicos et Hunt est [30] :

$$f(x) = |x - x_0|^s \sin(|x - x_0|^{-t}), \quad (1.7)$$

avec $t > 0$ et s quelconque. Cette fonction possède un point singulier d'accumulation d'oscillations en x_0 (voir figure 1.2 ou 1.4). Elle ne vérifie pas les conditions du théorème pr  c  dent bien que l'on puisse calculer son spectre [30] :

$$E(k) \propto k^{-\frac{2s+t+2}{t+1}} \text{ si } k \longrightarrow \infty, \quad (1.8)$$

qui est entre k^{-1} et k^{-2} quand $-1 \leq 2s \leq t$. Ce spectre reste en loi de puissance pour k pas trop grand même si on a une version tronquée pour $|x| < \rho$ de ce signal.

La fonction possède une dimension fractale [22] non triviale. Le lien possible avec l'intermittence est étudié dans [68, 67]. Comme le but est de pouvoir relier les résultats aux mesures nous

travaillons de préférence avec la dimension de capacité de Kolmogorov D_K . Elle est définie à partir du décompte du nombre $N(\varepsilon)$ de boîtes de taille ε nécessaire pour recouvrir l'ensemble. Le type de boîtes choisi doit avoir la dimension topologique de l'espace de travail. La dimension est alors donnée par [22] :

$$D_K \hat{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N(\varepsilon)}{-\ln \varepsilon}. \quad (1.9)$$

Rq : On préfère la dimension de capacité à la dimension de Hausdorff, bien que plus pertinente mathématiquement pour plusieurs raisons. Cette dernière n'est guère accessible aux mesures numériques. De plus, elle n'est différente de la dimension topologique que pour un ensemble réellement fractal ce qui n'est pas le cas si l'auto-similarité n'est que locale.

Vassilicos *et al.* [31, 44] ont montré aussi qu'il vaut mieux considérer la dimension D'_K de l'ensemble des intersections du signal avec une droite quelconque (par exemple l'axe si le signal est de moyenne nulle, donnant l'ensemble des zéros du signal), comprise entre 0 et 1. Cette définition est en fait construite initialement pour des signaux logiques ne prenant que des valeurs 0 ou 1 [67]. On remarque tout de suite que cette grandeur n'est pas sensible à l'amplitude. Pour une singularité du type (1.7), elle donnera des résultats supposant que $s = 0$. Pour la fonction f , $D'_K = t/(t + 1)$.

L'intérêt de D'_K est qu'elle est en général reliée au spectre du signal par [30, 67, 68] :

$$E(k) \propto k^{D'_K - 2}.$$

La relation exacte entre les propriétés spectrales et la dimension fractale n'est pas systématique ; elle est discutée dans [44]. Un point notable est qu'il faut une plage de vecteurs d'onde accessibles plus petite pour calculer D'_K que pour prouver un comportement auto-similaire du spectre. Même une version tronquée pour $|x| < \rho$ de ce signal, avec seulement quelques trois oscillations par exemple, peut suffire à mesurer D'_K et en déduire $E(k)$ pour $k < \rho^{-1/(1-D'_K)}$. Il faudrait au contraire une cinquantaine d'oscillations pour trouver de manière directe le spectre [30].

Les spirales correspondantes

Si on suppose que cette fonction est donnée par la coupe transverse d'un vortex spiralé, quel type de spirale convient ? Deux caractéristiques doivent être prises en compte : la position des bras donc des maxima lors d'une coupe ; l'évolution de l'amplitude quand on va vers le centre.

Sans s'occuper de l'amplitude, les maxima de (1.7) sont donnés par :

$$\tan(x^{-t}) = tx^{-t}/s.$$

Quand $x \rightarrow 0$, les maxima sont donc situés en : $x_m^{-t} \sim n\pi + \pi/2$, soit : $x \sim n^{-1/t}$. C'est la signature d'une spirale de type **algébrique** :

$$r \sim \theta^{-\beta}. \quad (1.10)$$

Les spirales naturellement associées aux fonctions choisies par Vassilicos et Hunt sont donc ces spirales algébriques qui sont de plus les seules spirales à avoir une dimension de capacité D_K non entière [67].

L'amplitude n'est presque pas contrainte ; on a une évolution vers le cœur qui est en : $|x - x_0|^s$ avec s quelconque. On peut même supposer d'avoir une divergence au centre en plus du comportement oscillant. Nous avons vu que $-1 \leq 2s \leq t$ conduisait à un spectre entre k^{-1} et k^{-2} , compatible avec des signaux turbulents.

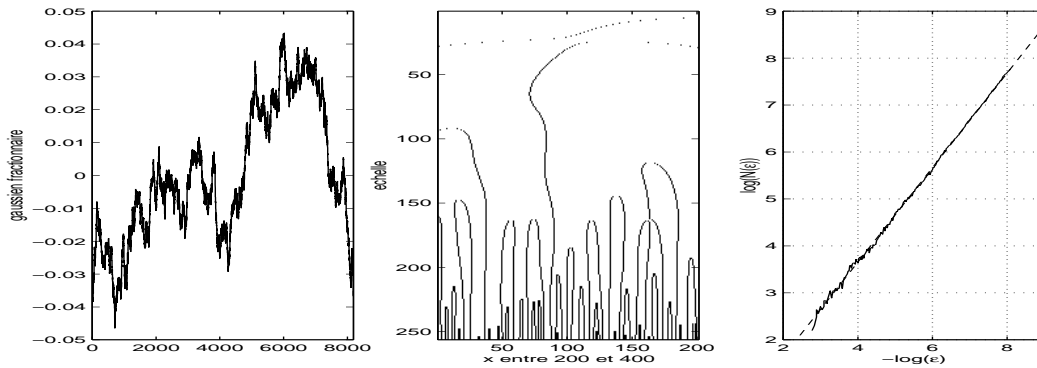


FIG. 1.3 – Mesure de D_E pour un bruit brownien fractionnaire de dimension 1.5. On a tracé dans l'ordre le signal, une portion du squelette de la transformée en ondelettes (donnant les parois), et la fonction $N(\varepsilon)$. La droite en pointillés est de pente 1. Notons que dans ce cas des lignes apparaissent à toutes échelles sans structure notable autre que le comportement statistique global.

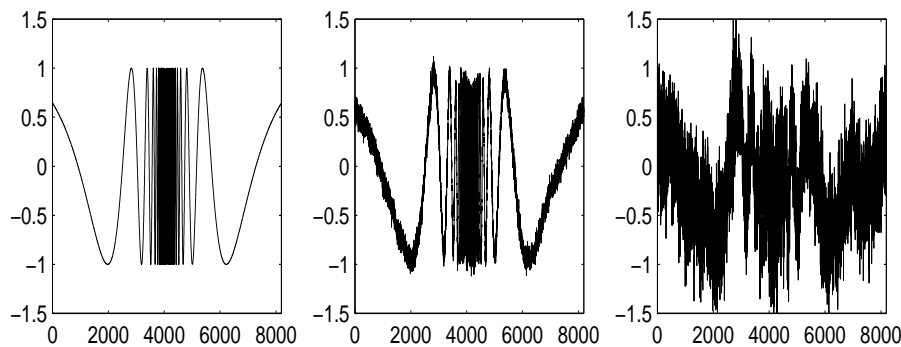


FIG. 1.4 – Signaux du type 1.7 corrompus par un bruit de phase ; de gauche à droite : 0%, 10%, 50%.

Outils d'analyse

Des méthodes d'analyse de signaux basées sur la recherche de ce type de singularités ont été développées par Vassilicos *et al.* [31, 44]. Elles ont pour but de mesurer de manière précise la dimension de capacité d'un signal de turbulence. Deux affinements sont nécessaires :

- Afin de différencier K -fractal et H -fractal, on mesure D'_K ou mieux D_E , dimension de Kolmogorov des zéros de la dérivée seconde du signal ; ces points sont ceux où le signal varie le plus rapidement et forment des sortes de parois. D_E donne des résultats exploitables pour des signaux qui ne sont pas uniquement “on-off”, alors que ce n'est pas souvent le cas pour D'_K [44]. $D_E = 1$ si le signal f comporte une infinité de singularités (figure 1.3) et doit être plus petit si il est formé de singularités isolés oscillantes ; $D_E = 0$ si le signal est un ensemble de singularités simples isolées.
- Un faible bruit rend la mesure directe de D_E presque impossible par un algorithme de décompte des boîtes : on trouve alors en général $D_E = 1$ qui est la dimension du bruit [31]... C'est encore plus vrai pour un signal dont la phase est brouillée. Voir la figure 1.5 qui indique le résultat de la mesure de D_E pour un signal avec 10% de bruit de phase. Cela se comprend car ce brouillage de phase transforme un signal cohérent, avec une structure, en un signal qui semble aléatoire (voir figure 1.4) mais de même spectre. Le lien entre les approches purement fractales et les singularités oscillantes se trouve peut-être là.

On utilise alors une méthode de détection des parois [70] par la transformée en ondelettes pour obtenir les zéros cherchés en fonction de l'échelle ; en prenant le chapeau mexicain¹⁰ comme ondelette d'analyse, on reflète à chaque échelle f'' . On reconstruit les zéros qui apparaissent à chaque échelle avant d'appliquer l'algorithme de mesure de la dimension de capacité avec cette fois un ensemble de points adapté à chaque échelle. On peut de plus filtrer le signal à chaque échelle en quantifiant avec un nombre fixé de valeurs possibles : cela permet de diminuer l'effet du bruit [44] ; ce n'est cependant pas entièrement suffisant pour analyser des signaux expérimentaux de manière certaine.

On ne détaillera pas plus la méthode introduite par Vassilicos, renvoyant le lecteur aux articles mentionnés [31, 44] pour les aspects algorithmiques. Nous présentons cependant quelques exemples de mesure sur des signaux tests associés aux spirales logarithmiques et algébriques, voir figures 1.2, 1.6, et sur les signaux issus de simulation¹¹. En fait la méthode n'est pour l'instant guère utile car si elle est valide pour une mesure des dimensions et donc du spectre des K -fractal, elle ne l'est pas tellement dans le but de choisir entre différents modèles possibles.

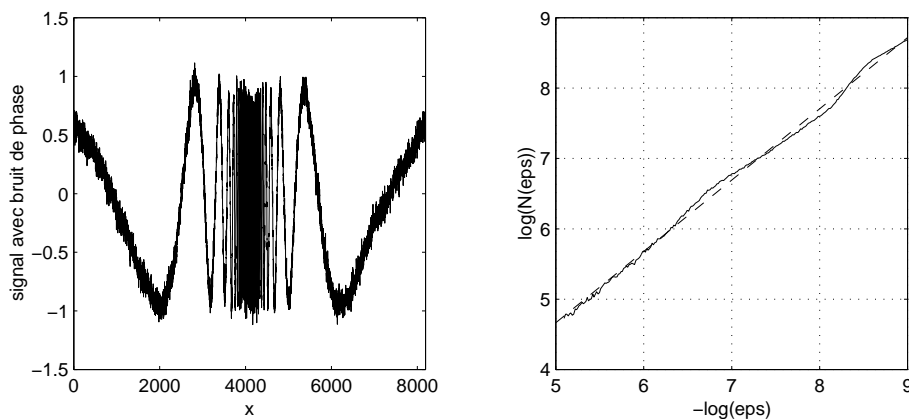


FIG. 1.5 – Estimation de D_E pour un signal du type (1.7) bruité. La droite en traits pointillés à droite est de pente 1.

1.3.2 Fonctions de Mellin et spirales logarithmiques

Les fonctions de Mellin...

Partant de l'idée que les lois d'échelle sont fondamentales en turbulence, on s'intéresse aux opérateurs de dilatation et de compression qui permettent de passer d'une échelle à une autre. Si on recherche une invariance par ces opérateurs, on doit naturellement se pencher sur les fonctions de Mellin qui sont leurs fonctions propres [9]. On s'intéresse donc aux fonctions :

$$f(x) = \operatorname{Re}\{|x - x_0|^{\alpha-1}\}. \quad (1.11)$$

La dimension D'_K de ces fonctions est nulle puisque le nombre de boîtes de taille ϵ nécessaires pour recouvrir l'ensemble de zéros de la dérivée seconde varie comme $\ln(\epsilon)$ et non en loi de puissance.

On peut calculer son spectre de Fourier en rajoutant un facteur $e^{-a(t-t_0)}$ pour assurer la convergence :

$$E(k) \sim k^{-2\operatorname{Re}(\alpha)}, \text{ si } k \gg a. \quad (1.12)$$

10. Dérivée seconde la gaussienne.

11. Voir le chapitre 2.

Le choix de $\text{Re}(\alpha) = 5/6$ permet par exemple d'assurer le spectre de K41 en $-5/3$ pour une seule singularité.

Remarquons qu'il n'est pas raisonnable d'espérer différencier une fonction type Mellin d'une fonction du type (1.7) à l'aide de la mesure de D_E . La figure 1.6 où est tracée $N(\varepsilon)$ en diagramme linéaire ou logarithmique montre que l'on peut rapidement lui attribuer une dimension D_E de l'ordre de 0.12, alors que le comportement semble en fait bien logarithmique.

... et les spirales logarithmiques

Ces fonctions sont liées aux spirales **logarithmiques** en :

$$r \sim e^{\beta\theta}, \quad (1.13)$$

car ses maxima sont donnés par $f'(x) = 0$ donc par $x = \exp(n\pi/\alpha_r)$, où n est un entier naturel.

On peut essayer de détecter si une spirale a un enroulement logarithmique ou algébrique en regardant la position des intersections entre les bras de la spirale et une droite passant par le centre. En traçant ensuite la distance des intersections au centre, en fonction de n , numéro de l'intersection, on peut en étudier le comportement :

- pour une spirale algébrique, la fonction sera linéaire en log-log ;
- pour une spirale logarithmique, elle le sera en diagramme semi-log.

Nous emploierons ces méthodes dans l'analyse des vortex de Lundgren. Une autre possibilité est de considérer l'évolution de la distance entre les bras δr en fonction de r , distance au centre :

$$\begin{aligned} \delta r_{\log} &= 2\pi\beta r ; \\ \delta r_{\text{alg}} &= 2\pi\beta r^{(\beta-1)/\beta}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

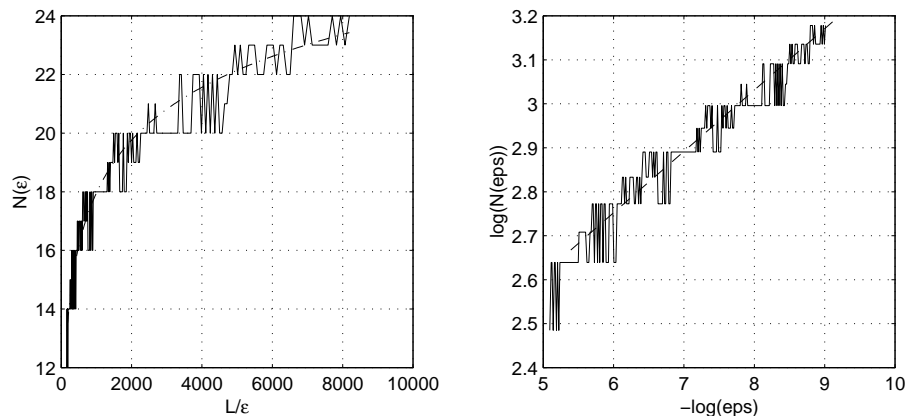


FIG. 1.6 – $N(\varepsilon)$ pour une fonction de Mellin : en diagramme linéaire, superposé à la fonction théorique en $\ln \varepsilon$; en diagramme logarithmique superposé à une droite de pente 0.12.

1.3.3 Quelles spirales apparaissent en dynamique des fluides ?

La première idée pour répondre à cette question qui aiderait à décider entre les deux possibilités présentées est de se tourner vers les expériences et les spirales que l'on peut observer. Il faut cependant restreindre nos ambitions : on ne sait pas visualiser directement la vorticité et on est obligé de supposer que le comportement d'un scalaire passif comme un colorant nous renseigne

sur les structure en spirale de la vorticité. Les deux seul résultats de notre connaissance sont dus à Petitjeans *et al.* [46] et Everson et Sreenivasan [21] qui concluent tous deux à une forme plutôt logarithmique en utilisant les méthodes indiquées ci-dessus.

L'étude plus facile des spirales dans les simulations numériques d'écoulement donne des résultats bien moins nets... Everson et Sreenivasan [21] ont des résultats inclinants vers des spirales logarithmiques alors que Moffatt [42] ainsi que Vassilicos et Angilella [3] trouvent des spirales algébriques. Comme l'effet quant à la forme des spirales de la méthode de désingularisation de Krasny qu'ils emploient n'est pas bien compris, on ne peut guère conclure.

Enfin si on préfère demander aux calculs issus de la dynamique de la vorticité, l'approche habituelle consiste à rechercher des solutions à l'équation de Birkhoff-Rott [54] qui gouverne l'évolution d'une feuille de vorticité, étant données sa forme initiale et son intensité. Selon les hypothèses adoptées il existe des solutions en spirale algébrique, la spirale de Kaden en particulier [54], ou logarithmique, selon le résultat de Kambe [34].

Nous ne pouvons pas espérer au final réussir à départager les deux approches. En fait, lors de la mesure de l'enroulement d'une spirale qui ne comporte qu'un nombre limité de tours, il est assez difficile en pratique de faire une suffisamment grande différence entre les deux comportements indiqués pour écarter complètement l'un ou l'autre.

Chapitre 2

Vortex de Lundgren

Intérêt de ces vortex

Dans un article de 1982 [38] Lundgren a construit une forme analytique pouvant décrire un vortex ayant une structure transverse plus compliquée qu'un vortex de Burgers forcément axi-symétrique. De plus elle est solution des équations de Navier-Stokes et pas seulement une forme *ad hoc*, à la manière des spirales de Gilbert [25], qui donnerait la structure voulue. Comme cette solution donne généralement des structures spiralées, elle est un outil incomparable pour poursuivre sur les idées exposées au premier chapitre : nous pouvons ainsi comparer une structure issue de la dynamique à des modèles issus d'idées statistiques ou sur les singularités d'un écoulement turbulent. Nous verrons quels sont les résultats majeurs portant sur la solution de Lundgren. Les articles principaux qui développent et complètent ce modèle sont de Lundgren [39] et Pullin, Saffman, Buntine [48, 49, 50, 51, 55, 56]. Pour une revue très intéressante, voir [52]. Nous essayons ensuite de nous servir de cette solution pour construire des simulations de signaux de vitesse. À terme l'objectif est de savoir ce que l'on peut simplifier et quelles sont les caractéristiques importantes à conserver dans une approche de modélisation.

2.1 Solution de Lundgren

Lundgren a proposé [38] une forme de solutions asymptotiques des équations de Navier-Stokes qui présentent les propriétés suivantes :

- la solution est une zone de vorticité étirée selon l'axe (Oz) et comprimée dans le plan orthogonal ;
- la forme générale obtenue est celle d'un feuillet de vorticité spiralé aux temps longs ;
- la solution cherchée est invariante par translation le long de l'axe (Oz) et sa vorticité est alignée avec cet axe : $\vec{\omega} = \omega(x, y, t)\hat{z}$; ainsi l'objet est décrit comme un filament autour duquel s'enroule une spirale 2D ;
- le spectre d'entrophie moyenné au cours du temps est celui attendu selon K41.

Nous redonnons ici une version non complètement détaillée de ce modèle en insistant sur les résultats principaux ou ceux qui ont été reformulés et utilisés dans le reste du travail.

2.1.1 Les présupposés du modèle

Nous n'étudierons que des situations où le fluide est incompressible : $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. En partant de l'idée que les zones à forte vorticité sont importantes pour la dynamique de la turbulence,

Lundgren a recherché une solution, pour la vorticité $\vec{\omega} \doteq \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$, de l'équation issue de (NS) :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \vec{\mathcal{S}} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (2.1)$$

La première hypothèse est de supposer que le champ de déformation, dû au tenseur $\vec{\mathcal{S}}$, est découplé de $\vec{\omega}$ dans les zones étudiées (celles des structures cohérentes). On prend ainsi, comme pour déterminer la solution en vortex de Burgers :

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}_s; \quad (2.2)$$

avec \vec{u}_s champ de vitesse irrotationnel tel que le tenseur de déformation associé est :

$$\vec{\mathcal{S}}(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t) & 0 \\ 0 & 0 & s(t) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

et \vec{v} champ de vitesse 2D associé à la vorticité $\vec{\omega} = \omega(r, \theta, t)\hat{z}$. La relation d'incompressibilité impose que $\alpha + \beta + s = 0$ et, en suivant le calcul de la solution de Burgers on suppose que $\alpha = \beta = -s/2$. On appelle s taux de déformation ou d'étirement.

Lundgren a introduit alors le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} S(t) &= \exp\left(\int_0^t s(\tau) d\tau\right), \quad T = \int_0^t S(\tau) d\tau, \\ \xi(t) &= \sqrt{S(t)} r \\ \vec{u} &= \sqrt{S(t)} \vec{U}, \quad \vec{v} = \sqrt{S(t)} \vec{V}, \\ \omega(r, \theta, t) &= S(t) \omega_2(\xi, \theta, T). \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'équation prend alors la forme, en notant V_r et V_θ les deux composantes de la vitesse associée à la vorticité ω_2 après le changement de variable :

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial T} + V_r \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi} + \frac{V_\theta}{\xi} \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta} = \nu \nabla^2 \omega_2. \quad (2.5)$$

Remarquons qu'on arrive implicitement à l'hypothèse d'une évolution bidimensionnelle de la structure. Cela est cohérent avec l'image que l'on se fait des filaments, des structures allongées le long d'une courbe presque rectiligne (qui donne ici l'axe Oz). La structure transverse est supposée être toujours la même. Cependant la solution complète n'est pas celle d'une équation 2D, mais bien la vorticité dans un problème à 3D, avec donc de l'étirement et en théorie le comportement spectral attendu en 3D !

2.1.2 Solution en spirale de l'équation 2D

Afin de trouver une solution asymptotique aux temps longs pour la vorticité en 2D, dont l'équation ne fait plus intervenir explicitement l'étirement, on décompose la vorticité et la fonction de courant en série de Fourier :

$$\begin{aligned} \omega_2(r, \theta, t) &= \sum_n \omega_n(r, t) e^{in\theta}, \\ &= \sum_n f_n(r, t) e^{in(\theta - \Omega^{(0)}(r, t)t)}, \\ \Psi_2(r, \theta, t) &= \sum_n g_n(r, t) e^{in(\theta - \Omega^{(0)}(r, t)t)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ψ_2 étant la fonction de courant 2D dont dérivent V_r et V_θ (voir 2.1.3) et Ω la composante axisymétrique de la vitesse angulaire.

Par un développement soigneux en puissances de t^{-1} , on montre que les approximations suivantes sont justifiées pour trouver une solution aux temps longs, le terme de viscosité étant de plus considéré de manière perturbative :

$$\begin{aligned}
\Omega(r, t) &= \Omega^{(0)}(r) + t^{-1}\Omega^{(1)}(r) + \dots, \\
&= \Omega^{(0)}(r) + \mathcal{O}(t^{-2}), \\
f_n(r, t) &= f_n^{(0)}(r) + f_n^{(1)}(r)t^{-1} + \dots, \\
&\simeq f_n(r) \exp\left(-\frac{1}{3}\nu n^2 |\Omega^{(0)}(r)|^2 t^3\right), \\
g_n(r, t) &= g_n^{(0)}(r) + g_n^{(1)}(r)t^{-1} + \dots, \\
&= t^{-2} \frac{f_n^{(0)}(r, t)}{n^2 |\Omega^{(0)}(r)|^2} + \mathcal{O}(t^{-3}).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

La solution est maintenant obtenue sous condition de se donner les fonctions $\Omega(r)$ ¹ et $f_n(r)$. Il est nécessaire pour cette solution que $\Omega(r)$ soit monotone. On étudie en général des modèles tels que $\Omega(r)$ est monotone décroissante et de signe constant afin d'obtenir une spirale qui s'enroule dans un seul sens vers le centre. Pour simplifier les modèles *ad hoc* considérés, on choisit généralement la même fonction $f_n(r)$ pour tout $n \neq 0$. Pour résumer, la vortacité du vortex en 3D est donnée par :

$$\omega(r, \theta, t) = S(t) \left[\omega_0(\xi) + \sum_{n \neq 0} f_n(\xi) e^{in(\theta - \Omega(\xi)T)} e^{-\frac{1}{3}\nu n^2 |\Omega'(\xi)|^2 T^3} \right]. \tag{2.8}$$

Enfin, une dernière relation doit impérativement être satisfaite :

$$r\omega_o(r) = \frac{d}{dr} (r^2\Omega), \tag{2.9}$$

venant de ce que $\omega_o(r)$ est la moyenne de la vortacité à la distance r du centre, et est donc reliée, par la formule de Stokes, à la composante axisymétrique de la vitesse orthonormale : $r\Omega(r)$.

Quelle allure a le vortex dont nous avons la forme analytique ? On peut sommer, dans la limite inviscide et en supposant que les f_n sont tous indentiques, la série. La vortacité 3D est alors :

$$\omega(r, \theta, t) = 2\pi S(t) f \left(\sqrt{S(t)} r \right) \delta \left(\theta - \Omega \left(\sqrt{S(t)} r \right) T \right). \tag{2.10}$$

C'est l'équation d'une spirale à un bras qui s'enroule autour de l'origine. La viscosité a pour effet d'élargir peu à peu les bras de cette spirale et de les dissiper en un temps caractéristique de l'ordre de $a^2/(\Gamma_0^2\nu)^{1/3}$, où Γ_0 est l'ordre de grandeur de la circulation et a le rayon typique de l'objet. Le cœur de la structure (ω_0) est amorti plus lentement en un temps diffusif de l'ordre de a^2/ν et peut tendre vers une allure de vortex de Burgers, dans laquelle la dissipation par viscosité est tout juste équilibrée par l'étirement constant. À titre d'exemple la figure 2.1 montre trois moments de l'évolution typique d'une telle solution jusqu'à la fin en vortex de Burgers.

Afin d'analyser la contribution au spectre d'entrophie de la spirale, on peut obtenir simplement le vecteur d'onde local, à une distance r du centre à l'instant t . On le définit à partir de la phase de (2.8) $k = \frac{\partial \phi}{\partial r}$ et on a :

$$k_n(r, t) = -n\sqrt{S(t)} \Omega' \left(\sqrt{S(t)} r \right) T(t) = \frac{2\pi}{\delta r}, \tag{2.11}$$

1. désignant dorénavant $\Omega^{(0)}(r)$

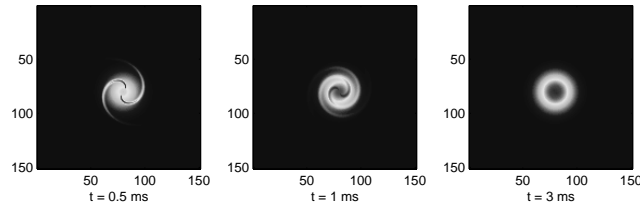


FIG. 2.1 – Évolution d'un vortex selon le modèle de Lundgren. Les paramètres sont : $a = 0.005$, $h = 0.5$, $\Gamma_0 = 0.1$, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$, $s = 10$. La forme analytique exacte est donnée plus loin.

relation qui sera cohérente avec celle issue du calcul du spectre par méthode de la phase stationnaire; δr désigne ici la distance entre deux bras de la spirale qui est bien la longueur caractéristique de variation à une distance r du centre. On a figuré en 2.2 une représentation schématique de l'évolution du vortex et de ses longueurs caractéristiques. Globalement la structure migre vers des longueurs d'onde plus grandes au cours du temps.

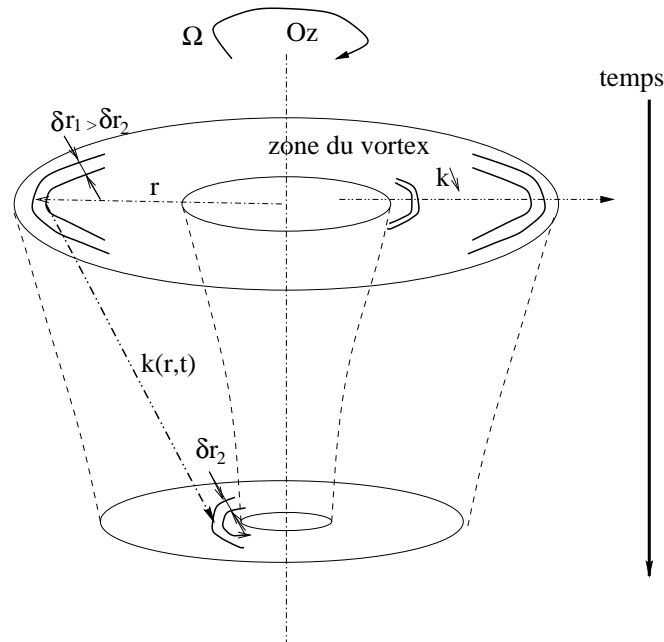


FIG. 2.2 – Illustration de l'évolution générale du vortex spiralé. Il y a un double effet de contraction générale et de rotation qui fait qu'une zone de longueur d'onde donnée migre vers le centre et est comprimée donc évolue vers des longueurs plus petites.

2.1.3 Étude du champ de vitesse

Dans une perspective de confrontation des résultats que l'on peut obtenir de ce modèle aux mesures expérimentales accessibles, il est intéressant d'étudier plus précisément le champ de vitesse associé à un vortex de Lundgren. Nous avons obtenu le début du développement de la fonction de courant $\Psi(r, \theta, t) = \Psi_2(\xi, \theta, T)$ [51]. On peut sommer [69, 3] l'expression de la fonction de courant à l'ordre T^{-2} dans la limite inviscide :

$$\Psi(r, \theta, t) = \Psi_0(\xi) + T^{-2} \sum_{n \neq 0} \frac{f_n(\xi)}{n^2 |\Omega'(\xi)|^2} e^{in(\theta - \Omega(\xi)T)} e^{-\frac{1}{3}\nu n^2 |\Omega'(\xi)|^2 T^3},$$

$$\begin{aligned} \simeq & \Psi_0(\xi) + \frac{T^{-2}f(\xi)}{(\Omega'(\xi))^2} \left\{ \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \left(\theta - \Omega T - 2\pi \text{E} \left(\frac{\theta - \Omega T}{2\pi} \right) \right)^2 \right. \\ & \left. - \pi \left(\theta - \Omega T - 2\pi \text{E} \left(\frac{\theta - \Omega T}{2\pi} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nous notons E la fonction partie entière. Nous noterons par la suite $\text{Fr}(x) = x - \text{E}(x)$ pour alléger l'écriture des formules.

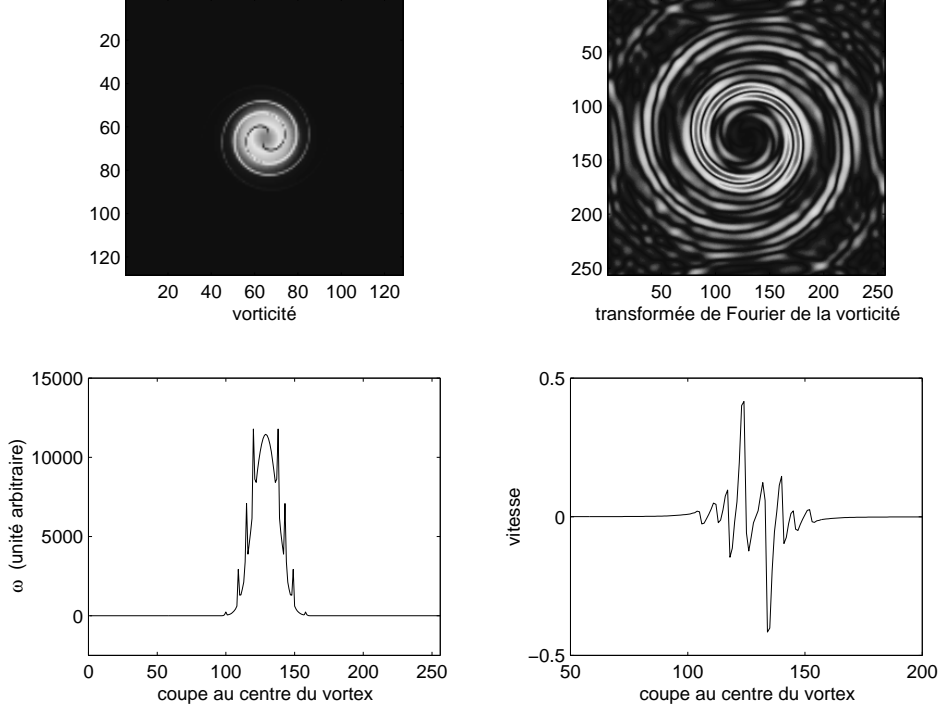


FIG. 2.3 – Vortex selon la forme proposée par Lundgren, avec $a = 0.005$, $h = 0.5$, $s = 100$, $\nu = 1.5e - 5$, $t = 1.5e - 3$. De gauche à droite, haut en bas : image du champ de vorticité à mi-vie ; transformée de Fourier 2D de ω ; coupe transverse de ω passant par le centre ; coupe transverse de la vitesse radiale.

On peut calculer les termes dominants pour la vitesse :

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + T^{-1} \sum_{n \neq 0} \frac{f_n(\xi)}{n\Omega'(\xi)} i e^{in(\theta - \Omega(\xi)T)} e^{-\frac{1}{3}\nu n^2 |\Omega'(\xi)|^2 T^3} + \mathcal{O}(T^{-2}) \\ &\simeq \xi \Omega(\xi) + T^{-1} \frac{f(\xi)}{\Omega'(\xi)} 2\pi \left[\frac{1}{2} - \text{Fr} \left(\frac{\theta - \Omega(\xi)T}{2\pi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{T^{-2}}{r} \sum_{n \neq 0} \frac{f_n(\xi)}{n\Omega'(\xi)} i e^{in(\theta - \Omega(\xi)T)} e^{-\frac{1}{3}\nu n^2 |\Omega'(\xi)|^2 T^3} + \mathcal{O}(T^{-3}) \\ &\simeq \sqrt{S} \frac{T^{-2}f(\xi)}{\xi(\Omega'(\xi))^2} 2\pi \left[\text{Fr} \left(\frac{\theta - \Omega(\xi)T}{2\pi} \right) - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les sommations sont faites dans la limite inviscide et sont valables pour $\theta - \Omega(\xi)T$ ramené par congruence entre $-\pi$ et π . Remarquons que l'on retrouve l'augmentation de la vitesse due à l'étirement puisque v_r et v_θ sont bien proportionnels² à $\sqrt{S(t)}$.

2. En utilisant $\xi = \sqrt{S} r$ et $\Omega'(\xi) = \sqrt{S} \Omega'(\sqrt{S} r)$.

En fait ces expressions ne sont guère utilisables. Les termes non symétriques sont au plus en $\mathcal{O}(t^{-1})$ et donc la vitesse est largement axisymétrique. Si on veut de plus faire un développement cohérent aux ordres suivants, il faut obtenir la fonction de courant à l'ordre t^{-3} : $g_n^{(3)}(\xi, T)$, la vorticité à l'ordre t^{-1} , et la vitesse de rotation à l'ordre t^{-2} : $\Omega^{(2)}(\xi, T)$, ce qui oblige à remettre en cause l'approximation comme quoi la vitesse de rotation n'évolue pas sur le temps de vie du vortex. Les formes demandées peuvent s'obtenir mais il n'a pas été possible de les exploiter plus loin.

2.1.4 Retour sur le champ de déformation

La solution obtenue dépend d'une hypothèse qui n'est pas modifiable : le tenseur de déformation doit être donné par (2.3). Le calcul de Buntine et Pullin [14] montre qu'on ne peut découpler l'équation pour $\vec{\omega}$ du champ de vitesse d'étirement que si $\vec{\mathcal{S}}$ a cette forme.

Des résultats connus contredisent partiellement cette hypothèse :

- les valeurs propres du tenseur de déformation vérifient $\langle \alpha\beta s \rangle < 0$ [27, 66] ;
- les filaments de vorticité observés dans des simulations numériques semblent s'orienter de préférence avec le vecteur propre correspondant à la valeur intermédiaire positive [62, 66].

Il n'existe pas de réponse pouvant justifier la pertinence de la forme de $\vec{\mathcal{S}}$ choisie. On peut constater que l'estimation du tenseur de déformation propre au vortex [49, 55] modifie la déformation totale en donnant :

$$\vec{\mathcal{S}}_{\text{tot}} = \begin{pmatrix} (\omega' - s)/2 & -\omega'/2 & 0 \\ \omega'/2 & -(\omega' + s)/2 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

où $'$ indique que la partie axisymétrique a été enlevée. Cela peut répondre à la première objection : les valeurs propres de $\vec{\mathcal{S}}_{\text{tot}}$ peuvent satisfaire l'inégalité précédente.

De manière générale les structures que l'on étudie sont en partie dépourvues de la non-linéarité des équations de (NS). Celle-ci vient en effet de l'interaction entre la vorticité et le champ d'étirement à travers le terme $\vec{\omega} \cdot \vec{\mathcal{S}}$ alors que pour des structures 2D la vorticité ne donne pas lieu à un étirement selon (Oz) qui l'affecterait en retour [66]. C'est ainsi qu'on est obligé de rajouter $\vec{\mathcal{S}}$ découplée de la vorticité. Le processus d'amplification de $\vec{\omega}$ n'est donc pas correctement décrit, selon le scénario mentionné dans [17].

L'absence de résultats sur la dynamique du champ de déformation et l'impossibilité jusqu'à présent de la découpler de celle de la vorticité nous interdit de pouvoir clarifier le problème d'interaction entre les dynamiques des deux champs. On peut rajouter un modèle pour estimer le tenseur $\vec{\mathcal{S}}$ qui est contraint par le mouvement aux échelles plus grandes que celles décrites par le vortex de Lundgren. Une approche de la simulation de cet écoulement d'advection et de déformation des vortex qui déterminerait \vec{U}_0 et $\vec{\mathcal{S}}$ peut se trouver dans Pullin et Saffman [49]. Il reste à en tirer des applications concrètes. En attendant les calculs faits ignorent toute contribution au spectre (  nergie ou pression) ou aux moments d'ordre supérieur de cet écoulement moyen d'advection. On suppose en fait que ce dernier n'influe que sur les grandeurs à des nombres d'onde plus petits que ceux donnés par le vortex qui forment la zone inertielle [51].

Quel taux d'étirement ? On supposera désormais que $\vec{\mathcal{S}}$ peut être pris selon (2.3). Le taux de déformation peut varier au cours du temps. Lundgren a montré que le résultat final était peu sensible à la variation au cours du temps de s [39]. Nous pourrions supposer qu'il reste constant et alors :

$$S(t) = e^{st} \quad \text{et} \quad T(t) = \frac{S(t) - 1}{s}, \quad (2.16)$$

ce que nous prendrons dans toutes les applications par la suite.

2.1.5 La solution en vortex de Burgers

La recherche [38] d'une solution axisymétrique à (2.5), qui se réduit alors à l'équation de la chaleur donne, après application du changement de variable lié à l'étirement :

$$\omega_0(r, t) = C \frac{S(t)}{T(t)} \exp\left(-\frac{r^2 S(t)}{4\nu T(t)}\right). \quad (2.17)$$

En supposant le taux de déformation s constant au cours du temps, la solution se comporte aux temps longs comme la solution de Burgers :

$$\omega_0(r, t) \sim Cs \exp\left(-\frac{sr^2}{4\nu}\right). \quad (2.18)$$

Le rayon caractéristique est $a = \sqrt{\nu/s}$, et la circulation du vortex est donnée par $\Gamma_0 = 4\pi\nu C$.

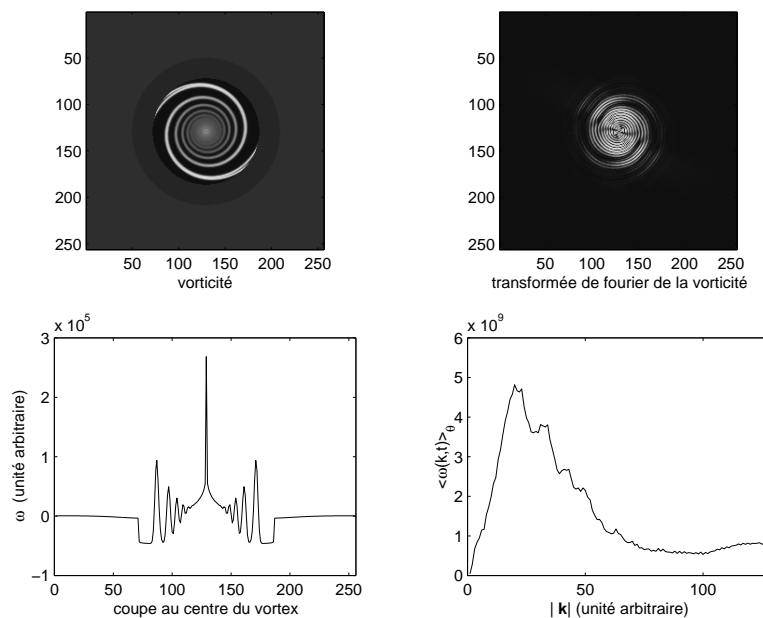


FIG. 2.4 – Vortex de forme logarithmique, avec $a = 0.005$, $\varepsilon = 0.02$, $\Gamma_0 = 0.1$, $s = 10$, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$, $t = 5 \cdot 10^{-4}$. De gauche à droite, haut en bas : image du champ de vorticité à mi-vie ; transformée de Fourier 2D de ω ; coupe transverse de ω passant par le centre ; spectre radial moyenné de la vorticité.

2.2 Propriétés spectrales de la solution

2.2.1 Expression du spectre d'énergie

Nous ne donnerons pas dans les détails les étapes du calcul assez fastidieux de Lundgren permettant de calculer le spectre d'énergie. Différentes versions peuvent être consultées dans [38, 39, 48, 50]. La situation physique considérée est celle d'une assemblée de vortex spirales du type décrit, orientés de manière isotrope dans l'espace comme dans le modèle de Townsend [65]. Ils sont distribués dans un volume de fluide de côté de longueur L . On suppose que ces

structures sont localement bidimensionnelles et que le champ de vorticité est alors donné par les équation ci-dessus. Le spectre d'énergie 1D est alors :

$$E(k, t) = E_{\omega\omega}(k, t)/2k^2 = \frac{1}{k^2} \int |\vec{\omega}(\vec{k}, t)|^2 k^2 d\hat{k}. \quad (2.19)$$

On suppose de plus qu'on trouve des vortex de tous les âges, avec une répartition uniforme, ce qui permet de remplacer la moyenne sur les différentes structures par une moyenne sur le temps lors de l'évolution d'un des objets. On adopte ainsi une sorte d'hypothèse ergodique sur les objets.

$$\sum_{\text{vortex } j} (\dots) = N_c \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\dots) dt. \quad (2.20)$$

N_c est le taux moyen de création de vortex par unité de temps, τ_1 est le temps initial où l'on considère le vortex formé (la spirale doit être par exemple amorcée par une instabilité de type Kelvin-Helmholtz [42]), τ_2 est le temps de coupure au-delà duquel on suppose que le vortex disparaît par dissipation ou plus vraisemblablement par un mécanisme de recombinaison [35] avec d'autres vortex. Ce deuxième temps de coupure est indispensable; sans lui le spectre serait dominé par le comportement du cœur du vortex ω_0 . Dernière hypothèse, on suppose que les filaments ont une certaine longueur axiale initiale selon (Oz) que l'on note l_0 .

La forme générale du spectre d'énergie est déduite, comme l'a montré Lundgren [39], du spectre d'entrophie 2D :

$$F_2(k, t) = k \int_0^{2\pi} |\omega_2(\vec{k}_2, t)|^2 d\theta_k, \\ E(k) = \frac{C}{k^2} \int_{T(\tau_1)}^{T(\tau_2)} S(T)^{1/2} F_2[S(T)^{-1/2}k, T] dT, \quad (2.21)$$

où C est une constante : $C = 2\pi^2 N_c l_0 / L^3$.

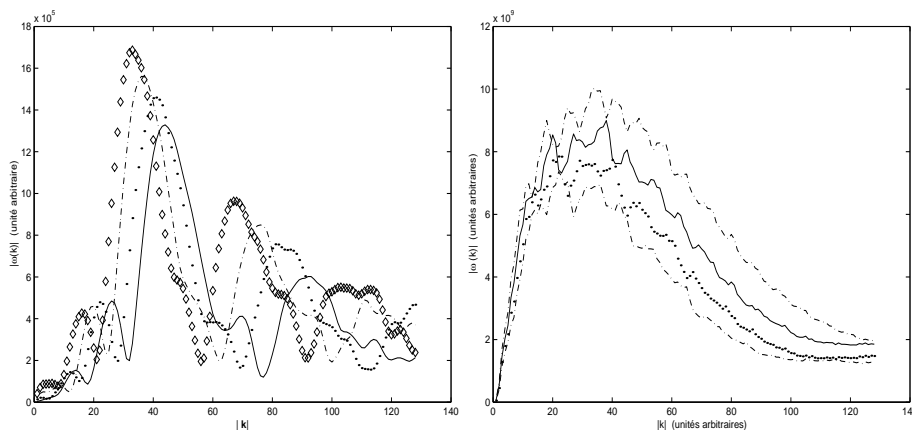


FIG. 2.5 – Visualisation de la cascade d'entrophie. On a tracé $\omega(k, t)$ à différents instants, espacés de 0.1 ms. Le premier dessin est pour une forme de vortex de Lundgren, l'autre pour une forme logarithmique. Dans chaque cas on a représenté quatre instants, le premier étant celui dont la courbe est globalement au-dessus. On voit clairement les déplacement des pics vers les grands k .

Après avoir injecté la décomposition en composantes de Fourier de ω dans ce calcul on évalue par la méthode de la phase stationnaire les intégrales. Townsend [65] ayant montré qu'une

assemblée de vortex de Burgers conduit à un spectre d'énergie en k^{-1} , nous recherchons la contribution des bras de la spirale ($n \geq 1$) et laissons de côté celle de l'harmonique nulle.

$$E(k) = E_0(k) + E_s(k). \quad (2.22)$$

Les maxima d'énstrophie issus des intégrales sont donnés par la relation $k(r, t)$ (2.19) que nous avons obtenue par des considérations élémentaires. Une légère reformulation du calcul de Lundgren est fournie en annexe. Le résultat est que :

$$F_2(k, t) = \frac{1}{\pi t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n |f_n(r_n, t)|^2}{n \Omega''(r_n)} e^{-2\nu k^2 t/3},$$

$$\text{d'où : } E_s(k) \propto k^{-5/3} \exp\left(-\frac{2\nu k^2}{3s}\right). \quad (2.23)$$

Le spectre total vérifie donc (1.5) dans une zone inertielle telle que $k \ll \sqrt{s/\nu}$ et k suffisamment grand pour que la contribution du cœur soit négligeable. L'interprétation est assez simple : au fil du temps les bras spiralés de la vorticité ont un vecteur d'onde dont le module augmente selon la relation (2.11). Cela se traduit par une cascade d'  nstrophie vers les petites échelles (voir figure 2.5).

Remarque : De (2.21) on obtient facilement le résultat de Townsend [65, 52] concernant le spectre d'une assemblée de vortex de Burgers. Nous montrons en annexe que pour un vortex de Burgers, le spectre d'  nstrophie 2D s'écrit :

$$F_2(k, t) = \frac{\Gamma_0^2}{(2\pi)^2} k \exp\left(-\frac{2\nu k^2}{s}\right), \quad (2.24)$$

qui conduit à un spectre d'énergie :

$$E_0(k) = \frac{C\Gamma_0^2\tau_2}{(2\pi)^3} k^{-1} \exp\left(-\frac{2\nu k^2}{s}\right), \quad (2.25)$$

en mettant τ_1 à zéro et en négligeant l'effet de l'étirement. Si on suppose en suivant Townsend et Lundgren que le taux moyen d'étirement est donné par la dissipation : $s = \sqrt{\epsilon/\nu}$, le nombre d'onde de coupure dans l'exponentielle apparaît être alors η^{-1} . On retrouve bien (1.3).

2.2.2 Les résultats montrés à la suite de ce modèle

Donnée telle quelle, la forme (2.8) ne permet pas d'aller plus loin sans passer par des méthodes de calcul numérique ou des approximations.

Calcul des fonctions de structure à tout ordre. Segel [59] a essayé de déterminer les fonctions de corrélation de la vitesse à deux points du modèle de vortex présenté ici. En suivant la même démarche que Lundgren (relier la fonction de structure aux fonctions de corrélation du champ de vorticité puis évaluer les intégrales par la méthode de la phase stationnaire), il montre que ces fonctions vérifient la loi K41 (1.1). Cependant il doit conclure par des argument dimensionnels et peut oublier dans son raisonnement des corrections à ce résultat. Saffman et Pullin [56] ont essayé d'obtenir des résultats plus précis en évaluant numériquement les intégrales à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo. Ils obtiennent un accord convenable avec des données expérimentales (meilleures que celles du modèle de Townsend). Jusqu'à l'ordre 6 l'accord semble tenir. Au-delà on ne sait pas si les désaccords viennent des erreurs numériques de plus en plus grandes pour estimer les moments d'ordre important ou si ces derniers dépendent de la structure exacte du vortex.

Champ de pression Pullin [51] a calculé le spectre de pression associé à un vortex de Lundgren et l'a comparé à celui obtenu pour un ensemble de vortex de Burgers. Il a montré que le terme pertinent venant de la structure spiralée a un spectre en $k^{-7/3}$. Cette loi est encore une fois en accord avec les arguments dimensionnels de K41.

Tentative de fermeture. Pullin et Saffman [48, 50] ont déterminé avec soin les paramètres du modèle et voulu fermer la relation donnant $E(k)$ à l'aide de la relation de Kármán-Howarth reliant la *skewness* à ce spectre. Les résultats numériques obtenus alors sur les différents moments des dérivées de la vitesse sont compatibles avec les simulations numériques et avec de nombreuses mesures; la valeur de la constante de Kolmogorov est aussi compatible avec les mesures déjà existantes. Ils n'ont tout de même pas pu montrer directement que la solution vérifiait la relation de Kármán-Howarth; cette conjecture est raisonnable puisque la solution de Lundgren est issue de (NS) comme cette relation [56].

Une limitation des conclusions est que la latitude sur le choix des paramètres reste grande... À côté des paramètres libres décrivant la structure d'un vortex $(\Omega(r), f_n(r))$, il faut définir les grandeurs statistiques concernant leur temps de vie (τ_1 et τ_2), le nombre de vortex créé par unité de longueur et unité de temps ($N = N_c l_0$), le taux moyen d'étirement s .

Le rôle du cœur du vortex. Une autre conclusion assez intéressante est donnée dans leurs articles [50]. Ils ont analysé en détail la contribution du cœur du vortex. Une première étude simpliste permet de supposer qu'il est approximativement donné par la forme d'un vortex de Burgers. Son spectre $E_0(k, t)$ est alors en $\exp(-Cte k^2 \eta^2)$ et est négligeable à grand nombre d'onde: $k > \sqrt{S(\tau_2)}/a$. La nécessité d'une coupure τ_2 aux temps de vie long apparaît ici clairement.

Une étude plus poussée montre que la contribution de l'harmonique zéro dépend de la circulation à l'infini du modèle :

- si $\Gamma(\infty) \neq 0$ et $\tau_2 \rightarrow \infty$: spectre en $\tau_2 k^{-1} e^{-2k^2 \eta^2}$ qui prédomine;
- si $\Gamma(\infty) \neq 0$ et $\tau_2 < \infty$: correction au spectre en k^{-1} dans la zone des k petits (avant zone inertielle);
- si $\Gamma(\infty) = 0$ et $\tau_2 < \infty$: correction au spectre en $k e^{-Ck^2 \eta^2}$, responsable d'une bosse au début de la zone inertielle dans le spectre d'énergie.

Le calcul du spectre de vortex de Burgers que nous avons indiqué fait bien entendu partie des deux premiers cas, à circulation totale non nulle.

L'intérêt de cette étude est qu'il permet de mieux savoir comment tronquer le spectre du vortex à un instant donné pour obtenir en moyennant le comportement des bras spiralés et donc celui de la zone inertielle du spectre d'énergie.

Coupure dissipative exponentielle ou gaussienne? Le calcul du spectre a montré qu'on aboutissait à une coupure visqueuse de la zone inertielle en $\exp\left(-\frac{2}{3} \frac{\nu k^2}{s}\right)$. Les résultats expérimentaux issus des mesures de vitesse comme des simulations numériques font incliner plutôt vers un terme de coupure esponentiel en $\exp(-k\eta)$. Pullin et Saffman [48] proposent que cela soit un effet de l'inhomogénéité de l'étirement senti par les vortex. Si on suppose une distribution aléatoire du s sous lequel évolue chaque vortex, ils montrent qu'on peut aboutir à cette coupure exponentielle.

L'approche de Gilbert. Gilbert a donné une modélisation des spirales de vorticité et de leur comportement qui suppose de considérer la vorticité advectée comme un scalaire passif [25] ; cela permet d'effectuer les calculs simplement. La vitesse de rotation choisie et donc les discontinuités présentes dans le champ de vitesse (aux endroits où passe le feuillet de vorticité spirale) détermine le spectre d'ensrophie. S'intéressant à des spirales algébriques avec $\Omega(r) \sim r^{-\beta}$, il a montré que sa méthode donnait le même résultat que le calcul de Lundgren : $E \propto k^{-2-(\beta-1)/(\beta+1)}$ dans une certaine zone inertielle.

Il montre ensuite que les deux points cruciaux du modèle de Lundgren sont l'existence d'un étirement du vortex qui intensifie la vorticité et contracte la spirale, et la nécessité de moyenner sur le temps d'évolution de la structure [26]. Un vortex spirale a en effet un spectre instantané en $k^{-\sigma}$ où l'exposant σ ainsi que la zone de validité de cette forme varie selon les détails du champ de vorticité et la vitesse d'enroulement. Dès qu'on moyenne selon les hypothèses de Lundgren, l'étirement conduit directement au spectre en $k^{-5/3}$, qui constitue un résultat robuste. On peut s'en faire une image séduisante à la suite de Gilbert, en étudiant l'évolution cinématique d'un paquet de vorticité entraîné par une rotation et un champ de déformation qui aboutit à ce spectre par des arguments simples.

Modèle de Lundgren	
$\Omega(r)$	$= \frac{\Gamma_0}{2\pi a^2 R^2} \left[1 - \left(1 + \frac{h}{1+h} R^2\right) e^{-R^2} \right], \text{ avec } R = \frac{r}{a}$
$\omega_0(r)$	$= \frac{\Gamma_0}{\pi a^2 (1+h)} (1 + hR^2) e^{-R^2}$
$f(r)$	$= \frac{\Gamma_0 h}{2\pi a^2 (1+h)} R^2 e^{-R^2}$
Modèle de Pullin et Saffman	
$\Omega(r)$	$= \frac{\Gamma_0}{2\pi a^2 R^2} \left[(1 + R^2) e^{-R^2} - 1 + \frac{\gamma(1 + \alpha/2, R^2)}{2\Gamma(1 + \alpha/2)} \right]$
$\omega_0(r)$	$= \frac{\Gamma_0}{\pi a^2} \left(\frac{R^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha/2)} - R^2 \right) e^{-R^2}$
$f(r)$	$= \frac{\Gamma_0}{\pi a^2 \Gamma(1 + \alpha/2)} R^\alpha e^{-R^2}, \text{ avec les définitions:}$
$\Gamma(\nu)$	$= \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt \text{ et } \gamma(\nu, x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x e^{-t} t^{\nu-1} dt.$

2.3  tude numérique des différents modèles

2.3.1 Les modèles étudiés

Modèles des articles de Lundgren, Pullin et Saffman. Nous avons repris les simulations numériques basées sur les réalisations proposées par ces auteurs. Les formes analytiques sont données dans le tableau ci-dessus. L'intérêt du choix de Lundgren [39] est qu'il décrit un vortex dont la limite est la solution de Burgers, sans autre comportement singulier que l'accumulation de longueurs caractéristiques de la spirale.

Le modèle de (PS) [48, 50] a l'avantage lui d'être à circulation nulle à l'infini. Il est construit sur l'idée (Onsager) qu'un bloc de vorticité positive va attirer à lui des zones de vorticité positive peu à peu. Cela implique une dissipation intrinsèque du vortex sans recourir à des mécanisme

Spirale algébrique	
$\Omega(r)$	$= \frac{\Gamma_0}{a^2} R^{-1/\alpha}$
$\omega_0(r)$	$= \frac{\Gamma_0}{a^2} \left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) R^{-1/\alpha}$ où $R = \frac{r}{a}$
$f(r)$	$= \frac{\Gamma_0}{a^2} e^{-R^2},$
Spirale logarithmique	
$\Omega(r)$	$= -\frac{\Gamma_0}{a^2} \left[\frac{\epsilon}{\epsilon+2} + 2 \ln(R) \right] R^\epsilon e^{-R^2}$ où $R = \frac{r}{a}$
$\omega_0(r)$	$= \frac{\Gamma_0}{a^2} \left[-2 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon+2} + 2 \ln(R) \right) (2R^2 - \epsilon - 2) \right] R^\epsilon e^{-R^2}$
$f(r)$	$= \frac{\Gamma_0}{a^2} R^{-1/6} e^{-R^2},$

de fragmentation (*burstings*) ou de recombinaison de filaments de vorticité et permet ainsi une évaluation du temps de vie τ_2 de la structure. L'autre caractéristique du modèle est qu'il est construit à partir d'une généralisation de la spirale de Kaden [54], que l'on retrouve en prenant $\alpha = -1/2$. Son défaut est de comporter une singularité qui tend vers l'infini au centre qui peut induire elle-même des propriétés particulières.

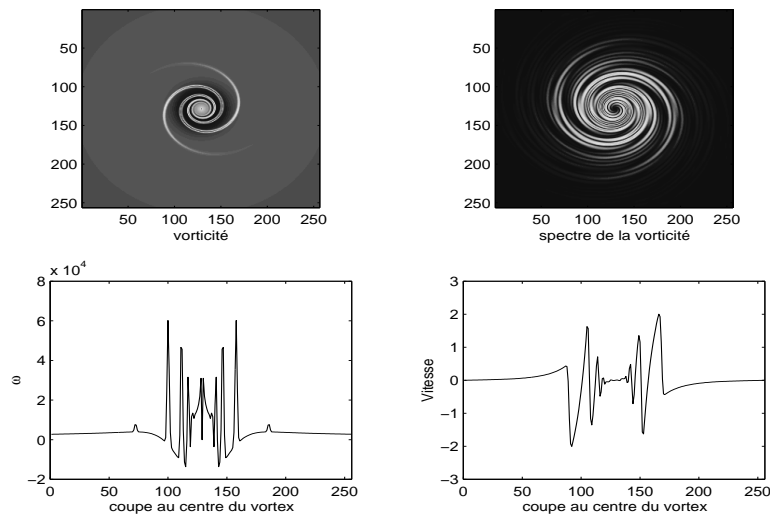


FIG. 2.6 – Vortex de forme algébrique, avec $a = 0.005$, $\alpha = 2$, $\Gamma_0 = 0.1$, $s = 10$, $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$, $t = 2 \cdot 10^{-3}$. De gauche à droite, haut en bas : image du champ de vorticité à mi-vie ; transformée de Fourier 2D de ω ; coupe transverse de ω passant par le centre ; coupe transverse de la vitesse radiale.

Modèles en spirale algébrique et logarithmique. En lien avec les études sur les spirales et les signaux qui leur sont associés du premier chapitre nous avons implémenté une solution donnant un enroulement logarithmique (figure 2.4) et une autre un enroulement algébrique (figure 2.6).

Les formes analytiques sont aussi indiquées dans le tableau ci-contre. Nous les avons choisies

à l'aide de deux relations :

- La vitesse de rotation doit vérifier $\theta \propto \Omega(r)$, relation imposée par le type de spirale. On prend éventuellement une approximation de la solution qui permet d'avoir $\Omega > 0$ et $\Omega' < 0$ comme requis pour la solution de Lundgren.
- La moyenne radiale de la vortacité ω_0 est alors imposée par (2.9).
- La fonction $f(r)$ donnant l'amplitude des bras est libre (pour les termes $n > 1$). On peut se baser sur le terme principal de la vitesse radiale dans (2.14) pour fixer le comportement voulu de l'amplitude de la vitesse.

Nous avons essayé de nous rapprocher pour le modèle logarithmique le plus possible des fonctions de Mellin afin de pouvoir comparer le comportement d'une simulation basée sur ces signaux d'un modèle construit à partir des résultats de Lundgren.

2.3.2 Mesure et représentation du spectre

On a vérifié que le comportement spectral calculé à partir de la vortacité est numériquement convenable. Une méthode pour représenter dans un plan temps-échelle la cascade d'enstrophie et le déplacement vers les petites échelles des bras de la spirale qui contiennent l'énergie de la structure, est de faire une transformée en ondelettes du vortex. Vassilicos et Angilella [3] ont approximé le résultat d'une transformée en ondelettes sur un vortex de Lundgren de forme algébrique. Nous nous sommes contentés pour l'instant de visualiser cet aspect en représentation de Fourier. La figure 2.10 montre l'allure de la TF du champ de vortacité, moyennée sur θ_k afin d'obtenir la distribution radiale, évoluant au cours du temps. On remarque la contribution du cœur, surtout dans la forme de Lundgren, qui est majeure aux petites échelles, varie peu rapidement. On note aussi les bras dans le plan (k, t) qui migrent vers les petites longueurs d'onde et sont courbés à cause de l'étirement. Si on fixe celui-ci à zéro les bras sont rectilignes. Enfin il est net que le détail de la structure temps-échelle dépend de la forme analytique choisie pour le vortex.

On peut ensuite montrer, en utilisant le lien (2.21) prouvé par Lundgren entre l'enstrophie et le spectre d'énergie, que ce dernier suit la loi de Kolmogorov. Il suffit de moyenner sur θ_k puis sur le temps étiré T . Le résultat est présenté figure 2.7, où on a tracé $k^{5/3} E(k)$. Dans tous les cas on constate la présence d'une zone intertelle assez nette. La moyenne a été réalisée sur des évolutions tronquées aux petits temps, et aux grands temps quand seule la présence du cœur du vortex se fait sentir.

2.3.3 Quelles formes de spirale ?

Dans l'esprit des travaux de Vassilicos, on a essayé de caractériser les réalisations du modèle de Lundgren en effectuant deux mesures :

- détermination du type de spirale,
- estimation de D_E .

La première est aisée en utilisant les propriétés mentionnées au 1.3.2. Nous vérifions en traçant figure 2.8 la position des bras r_n en fonction de l'indice de ce bras n en diagramme log-log ou semi-log que le modèle algébrique correspond avec un assez bon accord à une spirale algébrique sauf quand on s'éloigne beaucoup du centre du vortex. Le modèle logarithmique est lui encore plus clairement d'enroulement logarithmique. La courbe de $\delta r_n = r_{n+1} - r_n$ en fonction de r_n est aussi donnée pour la spirale logarithmique et a le profil linéaire passant par zéro attendu. Nous

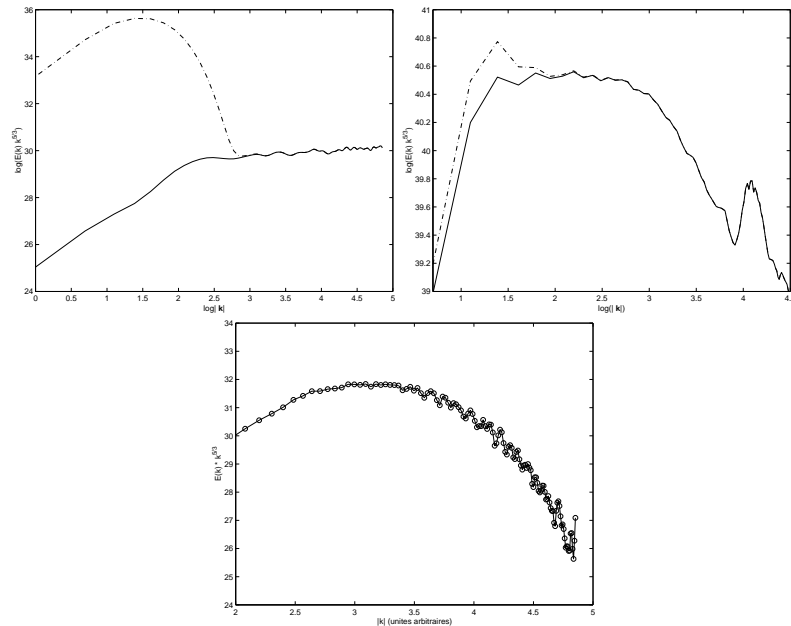


FIG. 2.7 – Spectre d'énergie corrigés par $k^{5/3}$ pour les modèles de Lundgren, logarithmiques et algébriques. Le tracé en pointillés inclut la contribution du cœur, l'autre non. Les trois figures sont en log-log.

donnons le résultat de la même étude pour un vortex selon la forme de Lundgren (figure 2.8). On ne peut conclure à aucun des deux modèles bien qu'on trouve toujours une zone assez étendue où l'on voudrait voir un type d'enroulement ou l'autre. Finalement cela illustre la difficulté à estimer sur le faible nombre de tours dont on dispose (moins d'une dizaine) comment s'enroule la spirale et il est difficile de prétendre que l'une ou l'autre forme doit être fondamentale.

Ensuite nous avons essayé les outils développés par Vassilicos pour mesurer la dimension de capacité des parois du signal D_E . Le modèle algébrique qu'il privilégie doit avoir un D_E différent de 1. En choisissant $\alpha = 0.5$ conformément à l'article [56], on a théoriquement $D_E = 2/3$. Nous avons estimé à l'aide de l'algorithme faisant appel à la transformée en ondelettes, D_E aux différents temps de l'évolution du vortex. Le résultat est donné figure 2.9. La moyenne sur les mesures est $\langle D_E \rangle = 0.64$ et l'écart-type est 0.15 ; le résultat est compatible avec la valeur $2/3$. Nous avons volontairement dans ces mesures choisi de fixer la direction de coupe retenue pour obtenir un signal 1D. Ainsi la rotation de la structure et le fait qu'initialement elle n'est pas axisymétrique influe sur le nombre de bras vus et leur espacement selon la direction de coupe choisie. Cela est responsable d'une grande partie du bruit constaté et du fait que la mesure de D_E semble osciller au cours du temps : ce n'est que l'objet qui tourne. Cet effet est cependant pertinent dans le sens où la mesure sur des signaux expérimentaux se fera sur des structures orientées dans tous les sens et de tout âge et on peut s'attendre à ce que la mesure de D_E soit bruitée et peu utilisable.

Afin de montrer qu'on peut facilement penser à tort être en présence d'un objet à dimension D_E non triviale, nous donnons les résultats de la mesure au cours du temps de D_E pour les modèles logarithmiques et de Lundgren. On observe assez nettement, en plus du bruit induit par la rotation, une évolution du D_E moyen à un instant donné. On peut comprendre que l'on trouve une dimension non égale à 1 bien que théoriquement ces vortex ne s'enroulent pas de manière algébrique : on voit un comportement sur les quelques bras existants donc sur une zone restreinte d'échelle, insuffisante en fait pour une mesure en cas d'enroulement logarithmique. Aux grands temps la spirale se développe et des longueurs caractéristiques plus faibles sont

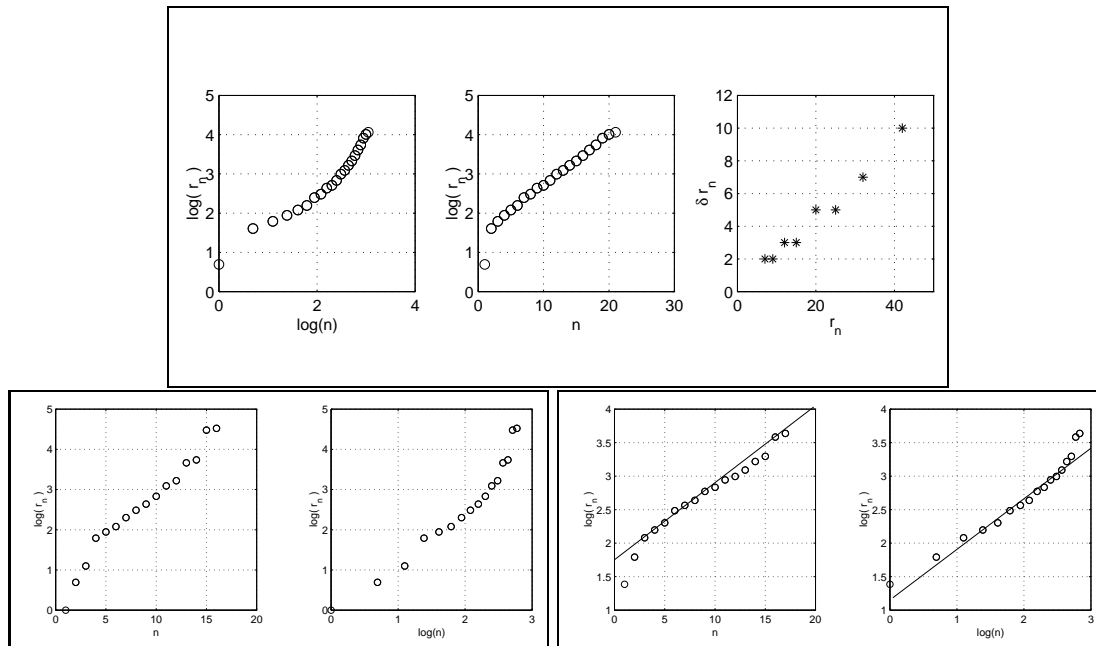


FIG. 2.8 – Détermination du type d'enroulement. Les premières sont pour le modèle logarithmique ; ensuite pour le modèle algébrique ; les dernières pour un vortex de Lundgren. Voir le texte pour les commentaires.

accessibles donc le D_E moyen pour la spirale logarithmique diminue puisque la pente de $\ln(\varepsilon)$ diminue quand on peut pousser l'analyse à plus petite échelle. Pour le modèle de Lundgren au contraire, l'augmentation au cours du temps du nombre de bras tend à rapprocher D_E de 1. La destinée finale de ce modèle étant un vortex de Burgers, la mesure de D_E n'a plus vraiment de sens aux temps longs car elle ne qualifie pas le comportement principal en Burgers.

Au final on ne dispose pas encore d'outil adéquat pour décrire ces structures. Un effort devra être fait en particulier sur les possibilités d'analyse qui permettraient de retrouver l'équivalent de ces objets modèles dans un signal expérimental.

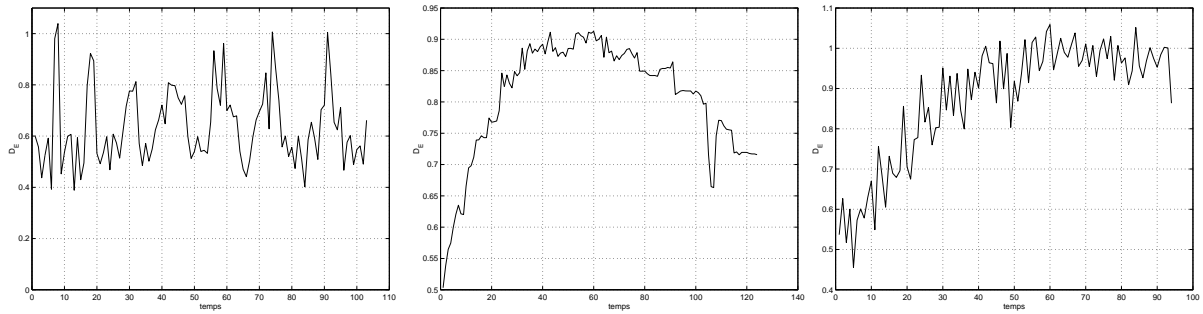


FIG. 2.9 – Mesure de D_E au cours de l'évolution des vortex de forme algébrique, puis logarithmique et proposée par Lundgren de gauche à droite.

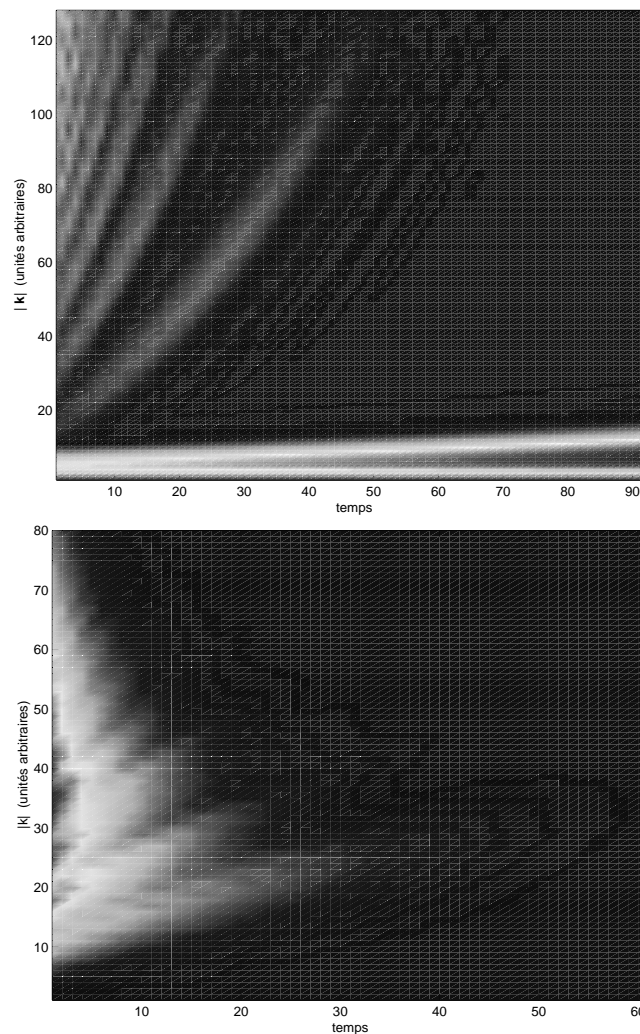


FIG. 2.10 – Représentation de l'évolution temporelle de $\omega(k, t)$. L'axe des abscisses est le temps, celui des ordonnées est le module du vecteur d'onde, de 0 à k_{max} . En haut la forme de vortex est celle de Lundgren, l'autre a une forme logarithmique. Notez les bras courbés qui se déplace dans le plan vers les petites longueurs caractéristiques.

Chapitre 3

Mesure de la vitesse d'un vortex de Lundgren

3.1 Motivation

Afin de nous rapprocher des expériences, nous essayons de simuler une mesure de la vitesse d'un écoulement modélisé aux petites échelles à la manière de Townsend. Comme le modèle de vortex de Lundgren présente le double avantage de donner des résultats sur les propriétés spectrales du champ de vitesse en accord avec les théories statistiques de la turbulence et avec les mesures existantes et d'être suffisamment général pour que l'on puisse choisir la forme exacte des vortex étudiés, nous supposons que la structure aux petites échelles peut être décrite par celui-ci. L'étude est principalement numérique car on a vu la difficulté à obtenir une forme analytique pertinente pour la vitesse.

Peu d'efforts [72] ont porté jusqu'à présent sur ce que donnerait effectivement une mesure sur une distribution de telles structures. Un article de Kuo et Corrsin [36] essayait de déterminer si le comportement des mesures de vitesse en deux points était cohérent avec une forme en tube, en feuillet ou en sphère¹ des structures détectées et concluait en faveur des objets tubulaires. Saffman et Pullin ont eux montré [55] que des vortex de Lundgren orientés avec une certaine anisotropie donnaient le même spectre d'énergie que dans le cas isotrope : le résultat en $k^{-5/3}$ pour le modèle de Lundgren ne dépend donc pas de l'isotropie aux petites échelles.

Nous avons essayé de mettre en place des tests numériques pour comparer les signaux qui seraient issus d'un modèle de Townsend-Lundgren et d'une expérience. Après avoir étudié la manière de déterminer la mesure de vitesse pour un objet, nous nous sommes attaché à fixer des paramètres dimensionnés cohérents avec les expériences, avant de simuler des signaux de vitesse pour un ensemble de vortex.

3.2 Mesure en un point d'un vortex d'orientation quelconque

3.2.1 Calcul du champ de vitesse

Alors que le champ de vorticité est directement accessible numériquement en sommant (2.8), la vitesse ne peut être calculée que par une inversion de la relation $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}$. Cette opération est possible (voir [54]) mais forcément non locale.

Nous avons choisi de l'inverser en passant dans l'espace de Fourier :

$$\vec{v}_{\vec{k}} = i \frac{\vec{k}}{k^2} \wedge \vec{\omega}_{\vec{k}}. \quad (3.1)$$

1. Une sphère est un modèle envisageable si l'étirement senti par le vortex au cours de l'advection est négligeable.

3.2.2 Orientation d'un vortex

Les données concernant l'évolution temporelle d'un vortex sont calculées au préalable et stockées dans des fichiers où la position initiale du feuillet de vorticité est toujours la même. Il faut donc définir correctement les paramètres d'orientation qui permettent de simuler une distribution isotrope de telles structures.

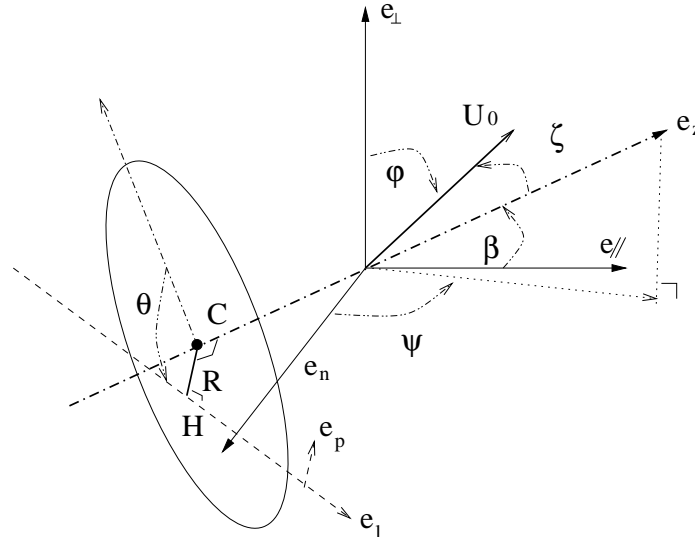


FIG. 3.1 – Orientation d'un vortex selon les conventions données dans le texte.

On note $\{\vec{e}_\perp, \vec{e}_n, \vec{e}_\parallel\}$ les vecteurs de la base orthonormée liée à la sonde parallèle à \vec{e}_\perp . Une sonde de vitesse mesure la composante dans le plan orthogonal à ce vecteur. On fixe d'abord la vitesse d'advection moyenne par rapport à la sonde, supposée dans le plan $(\vec{e}_\perp, \vec{e}_\parallel)$: norme U_0 et angle β avec le plan de mesure. L'axe (Oz) du vortex est orientée par rapport à la sonde au moyen des deux angles des coordonnées sphériques : φ la colatitude et ψ la longitude. Enfin dans le plan du vortex, on note R et θ les coordonnées polaires du point le plus proche du centre de la droite que parcourt la sonde au cours de la mesure (projection orthogonale sur la droite définie par le point où est la sonde et la vitesse d'advection \vec{U}_0). L'angle θ définit en fait le troisième angle d'Euler pour orienter le vortex dans l'espace. Enfin il faut introduire un paramètre supplémentaire pour le signe du vortex. On a donc 7 paramètres géométriques pour un objet.

Lors de la mesure, afin de faciliter l'accès aux données numériques, on utilise la base $\{\vec{e}_z, \vec{e}_l, \vec{e}_p\}$, avec \vec{e}_l qui est orientée selon la projection de \vec{U}_0 sur le plan du vortex, donc parallèle à la droite de mesure. La matrice de passage de cette base à la base de la sonde est :

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \alpha & \sin \psi \sin \alpha \\ \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \cos \psi \cos \alpha & -\cos \varphi \cos \psi \sin \alpha \\ \sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \sin \psi \cos \alpha & -\cos \varphi \sin \psi \sin \alpha \\ & -\sin \psi \sin \alpha & -\sin \psi \cos \alpha \\ & +\cos \psi \sin \alpha & +\cos \psi \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

L'équation donnant α est :

$$\tan \alpha = \frac{\cos \beta \cos \psi}{\cos \beta \cos \varphi \sin \psi - \sin \beta \sin \varphi}, \quad (3.3)$$

ce qui nous permet de calculer $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ avec un petit peu de trigonométrie. On introduit aussi l'angle ζ entre la vitesse \vec{U}_0 et le vecteur \vec{e}_z qui permet de trouver la projection de la vitesse d'advection sur le plan du vortex et sur l'axe.

$$\begin{cases} \cos \zeta &= \sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \zeta &= \cos \beta [\cos \varphi \sin \psi \cos \alpha + \cos \psi \sin \alpha] \\ &\quad - \sin \beta \sin \varphi \cos \alpha \end{cases} \quad (3.4)$$

Procédure de mesure adoptée

On a décomposé le champ de vitesse en deux parties : $\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{V}_{2d}$. La vitesse d'advection extérieure au vortex \vec{U}_0 est supposée être constante lors du passage d'un objet sur la sonde. La vitesse \vec{V}_{2d} est le champ bidimensionnel associé au vortex ; il est calculé d'avance et stocké. On a à disposition une bibliothèque des champs de vorticité et de vitesse de différents modèles, à différents âges. On peut alors simuler n'importe quelle mesure de vitesse sur un vortex.

Si on adopte un temps d'échantillonnage Δt sur la sonde, et prenant l'hypothèse de Taylor qui consiste à supposer que l'objet est transporté comme gelé sur la sonde à la vitesse moyenne \vec{U}_0 , le pas d'échantillonnage sur l'axe Oz est $\Delta z = U_0 \Delta t \cos \zeta$. Dans le plan du vortex, ce pas est : $\Delta r_{2d} = U_0 \Delta t \sin \zeta$. Il ne reste qu'à extraire les bonnes données.

Une amélioration est possible si suppose un taux de turbulence assez important. On peut utiliser la méthode proposée par Pinton et Labbé [47] en corrigeant le pas effectif d'échantillonnage en fonction de la vitesse moyenne mesurée en ce point. Une deuxième modification permet de supposer que le vortex évolue pendant la mesure et n'est pas simplement figé à un instant donné.

3.2.3 Validation de la procédure

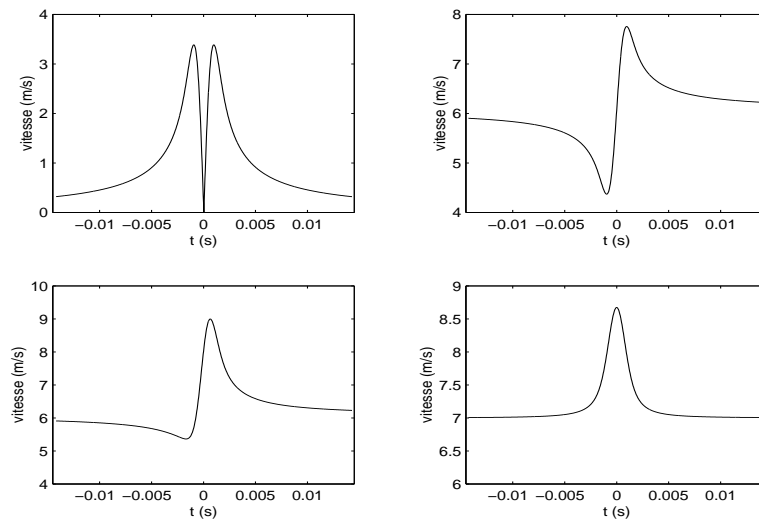


FIG. 3.2 – Mesure de la vitesse d'un vortex de Burgers dans la configuration de l'article []. Les paramètres d'orientation sont $\varphi = \pi/2$, $\psi = 0$, et de gauche à droite, bas en haut : $\beta = \pi/2$ et $R = 0$; $\beta = \pi/6$ et $R = 0$; $\beta = \pi/6$ et $R = 0.001$; $\beta = 0$ et $R = 0.001$. L'angle θ n'est pas pertinent grâce à l'axisymétrie du vortex.

Nous avons étudié les profils de vitesse mesurés pour un vortex de Burgers passant sur une sonde située dans le plan du vortex. On considère en de surcroît que la vitesse d'advection est aussi dans ce plan. En fait on a $\vec{\omega} // \vec{e}_n$ soit $\varphi = \pi/2$ et $\psi = 0$ ou π . Cette situation a déjà été

étudiée par P. Chainais *et al.* [15, 16] ce qui nous permet de confirmer les résultats. Pour un vortex de Burgers la vitesse est :

$$\begin{cases} u_r &= -sr/2, \\ u_\theta &= \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \left(1 - e^{-r^2/4a^2}\right), \\ u_z &= sz. \end{cases} \quad (3.5)$$

On négligera [16] la vitesse due au champ d'étirement.

Les profils mesurés sur la figure 3.2 sont les mêmes que dans l'article [16], figure 9. Comme les deux approches sont différentes, on peut penser qu'elles sont correctes.

3.3 Fixer les paramètres des objets

Une difficulté importante des modèles basés sur les objets cohérents est le nombre important de paramètres qu'il faut généralement fixer. Nous donnons d'abord les relations permettant de fixer ceux définissant un objet, puis ceux concernant l'ensemble de la population.

Quel vortex? Une première question est de savoir choisir entre les différentes formes analytiques possibles. Nous en avons vu quatre intéressantes. Les tests ont été menés sur ces 4 possibilités. Les constantes à définir sont alors : a rayon typique, s taux d'étirement, Γ_0 circulation typique, V échelle de grandeur de la vitesse autour du vortex. Sans aller jusqu'à réussir à fermer le système comme Pullin et Saffman, il faut que les grandeurs choisies soient cohérentes avec les propriétés du flot d'ensemble. On a les relations :

- $\epsilon \sim \nu s^2$ en suivant l'idée de Townsend [65, 64] selon laquelle l'étirement moyen senti par un vortex est produit par les autres vortex qui l'entourent. Cela permet en plus de vérifier que le spectre est fixé par la dissipation et la viscosité uniquement. Sous hypothèse d'isotropie et en supposant que la vorticité donne tout l'étirement on aurait : $\epsilon = 15\nu s^2$. En fait les calculs de (PSB) [50] indiquent que le rapport $s^2\nu/\epsilon \simeq 0.01$.
- $Re_V = \Gamma_0/\nu$, nombre de Reynolds du vortex que l'on fixe en paramètre. On peut supposer que ce nombre est celui qui décrit les fluctuations de vitesse turbulentes donc qu'il est lié au nombre de Reynolds associé à l'échelle de Taylor. Dans les simulations numériques de Jiménez [32, 24] ainsi que dans les calculs de Pullin et Saffman [48], Re_V est entre 100 et 1000.
- $V \simeq U_0\sqrt{\tau}$ où τ est le taux de turbulence de l'écoulement. Cette relation suppose encore une fois que la turbulence est principalement due aux vortex.
- $\Gamma_0 \simeq 2\pi Va$, relation donnant la circulation autour du vortex. Elle peut être remplacée par la détermination du rapport $sa^2/4\nu$, rapport entre la taille caractéristique d'un vortex spiralé et le rayon d'équilibre d'un vortex de Burgers. Cependant la difficulté à estimer cette grandeur à partir des données expérimentales nous a conduit à préférer l'autre relation.    titre d'indication, (PSB) prennent $sa^2/4\nu$ entre 10 et 100 [50].

Ces relations ne forment pas un système fermé ; ce ne sont que des indications pour prendre des paramètres cohérents avec la dissipation moyenne, la viscosité, le nombre de Reynolds et le taux de turbulence d'un écoulement étudié.    partir des expériences menées à la soufflerie du laboratoire de l'ENSL, on peut estimer : $s \simeq 100 \text{ s}^{-1}$, $a \simeq 0.005 \text{ m}$, $\Gamma_0 \simeq 0.1$, $V \simeq 2.8 \text{ ms}^{-1}$. Ces valeurs ont majoritairement été utilisées dans les simulations numériques.

Statistique des structures. En supposant l'isotropie, on convient que les angles d'orientation ψ , φ , θ sont aléatoires de distribution uniforme. La distance R de la sonde au centre l'est aussi mais il faut la borner pour que le passage d'un vortex corresponde effectivement à un vortex près de la sonde! On peut prendre un multiple de a comme limite. Le signe du vortex est lui aussi aléatoire (on doit retrouver l'image de l'allée de tourbillons de von Kàrmàn avec autant de vortex dans un sens que dans l'autre).

Le choix de \vec{U}_0 est plus délicat : il faut avoir un modèle pour les grandes échelles du flot avec une variation lente de U_0 et β au cours du temps. Ce travail reste à faire, peut-être en se basant sur les idées de Pullin et Saffman [49]. En attendant il suffit de prendre U_0 constant et β aléatoire et lentement variable. Un seul objet ayant les propriétés spectrales voulues, un ensemble les aura aussi, même avec un modèle irréaliste pour le flot moyen.

Il faut aussi déterminer le temps de vie des vortex. Dans un souci de simplicité on se base sur l'étude des propriétés spectrales menées et on accepte uniquement la zone temporelle où les bras de la structure évolue en conduisant au spectre de K41. Une évaluation indépendante [48] de τ_2 mais guère plus précise est possible en mettant à zéro l'exponentielle réelle de (2.8) :

$$sT_2 \simeq \frac{sa^2}{4\nu} \left(\frac{\Gamma_0}{\nu} \right)^{-2/3}, \quad (3.6)$$

puisque $|\Omega'| = \mathcal{O}(\Gamma_0/a^3)$. Il faudrait des résultats sur l'interaction et la recombinaison de vortex pour faire mieux.

Temps d'attente entre deux vortex Abry *et al.* [1, 2] ont montré que la statistique des événements de dépression, associés aux filaments de vorticité était poissonnienne sauf aux temps très courts [16] qui correspondent vraisemblablement à des distances où ils interagissent. Comme nous ne savons pas comment décrire ceci actuellement, nous prenons des vortex indépendants en interdisant qu'ils se superposent. La loi d'attente est alors celle de Poisson [45] après un temps d'attente correspondant au passage du rayon moyen d'un vortex :

$$p(\Delta t) = \mu e^{-\mu \Delta t}. \quad (3.7)$$

μ^{-1} est le temps moyen entre deux objets. On peut supposer que les vortex remplissent quasiment tout l'espace de volume \mathcal{V} . Comme leur longueur est typiquement λ , leur diamètre $a\sqrt{2}$, et la distance moyenne entre deux est $U_0\mu^{-1}$, on a :

$$\frac{\mathcal{V}_{\text{vortex}}}{\mathcal{V}} = \frac{2a^2\lambda}{(U_0\mu^{-1})^3}, \quad (3.8)$$

$$\text{d'où : } \mu \simeq \frac{U_0}{(2a^2\lambda)^{1/3}}. \quad (3.9)$$

3.4 Essais de simulation d'un signal de vitesse

Nous en sommes aux balbutiements de ces essais. Seule la programmation des procédures est en place avec les estimations indiquées dans la partie précédente. Des tests sont en cours pour vérifier d'une part que le spectre d'énergie mesuré sur la vitesse, et non plus sur la vorticité est correct, d'autre part que les propriétés (visuelles autant que géométriques) des signaux et ses moments ou toute autre propriété que l'on sait mesurer sont en accord avec les résultats expérimentaux.

Le premier point est de s'occuper du spectre. Nous l'avons mesuré déjà à partir de la seule vitesse en réalisant des coupes aléatoires à travers les vortex. Les paramètres d'un objet, pour

son orientation comme pour son âge, sont déterminés aléatoirement. Le seul aspect non étudié est alors le temps d'attente entre deux vortex et les problèmes de superposition partielle de deux objets. Un résultat typique, pour le modèle algébrique est donné figure 3.3. On constate encore une fois la nécessité de déterminer convenablement les limites de temps de vie des vortex pour obtenir une zone inertielle.

La suite est à l'heure actuelle en cours d'étude et nous ne disposons pas encore de résultats supplémentaires.

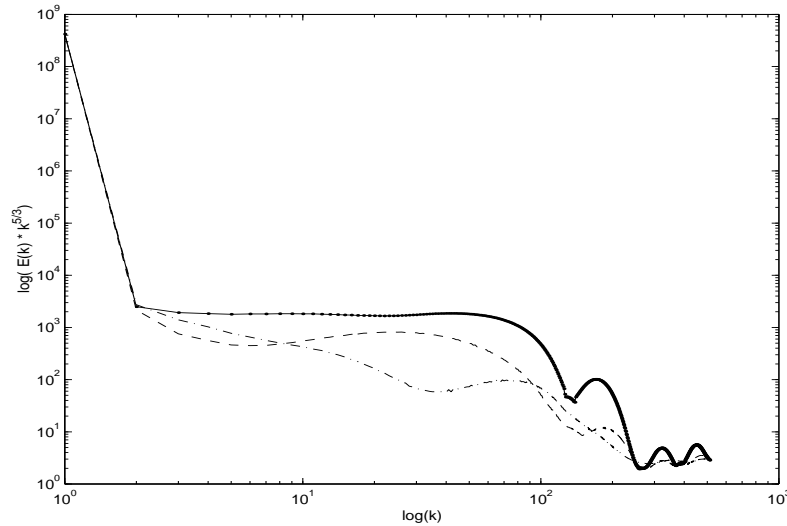


FIG. 3.3 – Mesure du spectre d'énergie à partir des simulations de vitesse d'un vortex de modèle algébrique. Le spectre est corrigé par $k^{5/3}$. La courbe – correspond à une moyenne sur des vortex jeunes uniquement (âge de τ_1 à environ la moitié du temps de vie), - . à une moyenne sur des vortex vieux uniquement (âge de la moitié du temps de vie à τ_2).

Conclusion

Où en sommes-nous de l'objectif de modélisation annoncé dans l'introduction? Actuellement les résultats qui préexistaient ont été largement débroussaillés. En particulier nous avons réuni les éléments précis qui permettent de forger une image simple de modèles intéressants: des objets solution de (NS) avec une structure interne plus riche qu'un simple vortex de Burgers, se rapprochant de singularités oscillantes (par l'existence d'une partie spiralée en particulier).

Nous commençons aussi à étudier les propriétés des simulations de mesures de vitesse mises en place, comme elles ont été décrites, à partir des vortex de Lundgren qui ont une forme en adéquation avec l'image dégagée de la première partie. Les études d'un seul vortex ont montré que le spectre est convenable qu'il soit numériquement calculé à partir de la vitesse comme de la vorticité. Sans pour l'instant s'occuper des interactions entre objets et/ou échelles, nous avons posé les principes pour obtenir la statistique des objets à mélanger.

Nous avons aussi vu l'insuffisance des outils construits sur les idées géométriques et sur les fractales. Ils ne permettent pas de discriminer entre diff erents modèles et ne donnent actuellement pas des résultats exploitables. D'autres méthodes devront être trouvées.

Bien engagés sur le problème de la modélisation des signaux de vitesse, nous continuons cette étude systématique. L'objectif est de pouvoir déterminer plus précisément les paramètres adaptés conduisant aux propriétés spectrales attendues pour la turbulence. Ensuite, nous pourrions simplifier peut-être, en se basant sur une connaissance solide des objets qui sont solution de Navier-Stokes, la modélisation pour s'intéresser aux fonctions de type Mellin (ou celles qui seront adaptées) et mettre en place les outils d'analyse adéquats.

Annexe

Calcul du spectre pour la solution de Lundgren

On part des équations (2.21) qui donnent après moyenne sous hypothèse ergodique le spectre d'énergie en fonction du spectre d'ensrophie $F_2(k, t)$ du problème réduit à 2D :

$$\begin{aligned} F_2(k, t) &= k \int_0^{2\pi} |\omega_2(\vec{k}_2, t)|^2 d\theta_k, \\ E(k) &= \frac{C}{k^2} \int_{T(\tau_1)}^{T(\tau_2)} S(T)^{1/2} F_2[S(T)^{-1/2}k, T] dT, \end{aligned} \quad (10)$$

On calcule la transformée de Fourier de la solution (2.8) proposée par Lundgren :

$$\begin{aligned} \omega_2(\vec{k}_2, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \omega_2(r, \theta, t) e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \omega_0(r, t) e^{-ikr \cos(\theta - \theta_k)} r dr d\theta \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n \neq 0} \int f_n(r) e^{in(\theta - \Omega(r)t)} e^{-ikr \cos(\theta - \theta_k)} e^{-\frac{1}{3}\nu n^2 |\Omega'(r)|^2 t^3} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)} I_0(k, t) + \sum_{n \neq 0} \frac{(-i)^n}{2\pi} I_n(k, t) e^{in\theta_k}, \end{aligned} \quad (11)$$

où $I_n(k, t)$ est défini à l'aide de la fonction de Bessel d'ordre n J_n :

$$\begin{aligned} I_n(k, t) &= \int_0^\infty \omega_n(r, t) J_n(kr) r dr \\ J_n(kr) &= \frac{i^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} e^{-ikr \cos \theta} d\theta \end{aligned} \quad (12)$$

En prenant le module au carré, on arrive à :

$$|\omega_2(\vec{k}_2, t)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(I_0(k, t)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |I_n(k, t)|^2 \right) + \sum_{m \neq 0} \text{termes en } e^{im\theta_k}. \quad (13)$$

Après intégration sur θ_k il reste :

$$F_2(k, t) = \frac{k}{2\pi} \left(I_0(k, t)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |I_n(k, t)|^2 \right). \quad (14)$$

Évaluation des intégrales. On calcule par la méthode de la phase stationnaire les intégrales $I_n(k, t)$, pour $n \geq 1$. Le développement asymptotique des fonctions de Bessel est :

$$J_n(kr) \underset{(rk \rightarrow \infty)}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2\pi kr}} \left((-i)^{n+1/2} e^{ikr} + i^{n+1/2} e^{-ikr} \right), \quad (15)$$

ce qui permet d'écrire dans la limite de $kr \rightarrow \infty$:

$$I_n(k, t) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi kr}} \int \left((-i)^{n+1/2} e^{ikr} + i^{n+1/2} e^{-ikr} \right) f_n(r) e^{-in\Omega(r)t} e^{-\frac{1}{3}\nu n^2 |\Omega'(r)|^2 t^3} r dr. \quad (16)$$

La phase des deux termes est :

$$\varphi = \pm ikr - in\Omega(r)t. \quad (17)$$

Elle est stationnaire si $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$ et comme $\Omega' < 0$ et $k > 0$, on a pour condition : $k = -n\Omega'(r_n)t$, soit la relation (2.11). Avec $\varphi'' = -in\Omega''(r_n)t$, on a :

$$\begin{aligned} I_n(k, t) &\simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi k r_n}} i^{n+1/2} r_n f_n(r_n) e^{-\frac{1}{3}\nu n^2 |\Omega'(r_n)|^2 t^3} \sqrt{\frac{2\pi}{-in\Omega''(r_n)}} e^{-ikr_n - in\Omega(r_n)t}, \\ &\simeq \frac{i^n}{\sqrt{n\Omega''(r_n)t}} \sqrt{\frac{r_n}{k}} f_n(r_n) e^{-ikr_n - in\Omega(r_n)t} e^{-\frac{1}{3}\nu n^2 |\Omega'(r_n)|^2 t^3}. \end{aligned} \quad (18)$$

On calcule alors le module au carré de ces intégrales :

$$|I_n(k, t)|^2 \simeq \frac{r_n}{n\Omega''(r_n)t} |f_n(r_n)|^2 e^{-\frac{2}{3}\nu n^2 |\Omega'(r_n)|^2 t^3}, \quad (19)$$

$$\text{d'où } |\omega_2(\vec{k}_2, t)|^2 \simeq \frac{k^{-1}t^{-1}}{(2\pi)^2} 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{n\Omega''(r_n)} |f_n(r_n)|^2 e^{-\frac{2}{3}\nu n^2 |\Omega'(r_n)|^2 t^3} \right), \quad (20)$$

sans tenir compte du terme du cœur et des termes en $e^{im\theta_k}$. Après intégration sur l'angle θ_k on obtient le spectre d'entrophie des bras :

$$\begin{aligned} F_2(k, t) &\simeq \frac{t^{-1}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{n\Omega''(r_n)} |f_n(r_n)|^2 e^{-\frac{2}{3}\nu n^2 |\Omega'(r_n)|^2 t^3} \\ &\simeq \frac{t^{-1}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{n\Omega''(r_n)} |f_n(r_n)|^2 e^{-\frac{2}{3}\nu k^2 t}, \end{aligned} \quad (21)$$

en utilisant la définition de r_n . Enfin avec (10) on a :

$$\begin{aligned} E_s(k) &\simeq \frac{C}{k^2} \int_{T(\tau_1)}^{T(\tau_2)} \sqrt{S(T)} \frac{1}{\pi T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n\Omega''(\xi_n)} |f_n(r_n)|^2 \right) e^{-\frac{2}{3}\nu \frac{k^2 T}{S}} dT \\ &\simeq \frac{C}{k^2} \int_{T(\tau_1)}^{T(\tau_2)} \sqrt{S(T)} \frac{1}{T} G\left(\frac{k}{\sqrt{ST}}\right) e^{-\frac{2}{3}\nu \frac{k^2 T}{S}} dT, \end{aligned} \quad (22)$$

en définissant de manière adéquate la fonction G . Aux grands temps, on doit avoir $S = 1 + sT \simeq sT$ donc :

$$E_s(k) \simeq \frac{C}{k^2} \int_{T(\tau_1)}^{T(\tau_2)} \sqrt{\frac{s}{T}} G\left(\frac{k}{\sqrt{sT}}\right) e^{-\frac{2}{3}\nu k^2/s} dT. \quad (23)$$

La contribution principale vient des grands temps. On fait le changement de variable : $u = T/k^{2/3}$ et il vient :

$$E_s(k) \simeq \frac{C}{k^2} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\frac{s}{u}} k^{-1/3} G(u^{-3/2}) e^{-\frac{2}{3}\nu k^2/s} k^{2/3} du. \quad (24)$$

Finalement on arrive à (2.23) :

$$E_s(k) \propto k^{-5/3} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{\nu k^2}{s}\right). \quad (25)$$

Spectre du cœur du vortex

Le spectre du cœur est donné par l'intégrale I_0 . On suppose que la vorticité moyenne est donnée par un vortex de Burgers, ce qui nous permettra de retrouver le résultat de Townsend pour le spectre d'une assemblée de vortex de Burgers.

$$E_0(k) = \frac{C}{k^2} \int_{T(\tau_1)}^{T(\tau_2)} S(T)^{1/2} F^{(0)}_2[S(T)^{-1/2}k, T] dT \quad (26)$$

où $F^{(0)}_2(k, t) = \frac{k}{2\pi} |I_0(k, t)|^2$.

Cette intégrale ne peut pas s'évaluer par la phase stationnaire et il faut se donner une fonction explicite pour $\omega_0(r)$. On doit calculer :

$$I_0(k, t) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \omega_0(r) e^{-ikr \cos(\theta)} dr d\theta \quad (27)$$

$$\omega_0(r) = \frac{s\Gamma_0}{4\pi\nu} \exp\left(-\frac{sr^2}{4\nu}\right). \quad (28)$$

La transformée de Fourier se calcule explicitement et on a :

$$\begin{aligned} \omega_2(k, t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{s\Gamma_0}{4\pi\nu} \int_0^\infty e^{-sr^2/4\nu} J_0(kr) r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{s\Gamma_0}{4\pi\nu} \frac{2\nu}{s} \exp\left(-\frac{\nu k^2}{s}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \Gamma_0 \exp\left(-\frac{\nu k^2}{s}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

On a donc :

$$F^{(0)}_2(k, t) = k |\omega_2(k, t)|^2 2\pi = \frac{\Gamma_0}{(2\pi)^3} k \exp\left(-\frac{2\nu k^2}{s}\right). \quad (30)$$

Le calcul de la moyenne temporelle afin d'obtenir le spectre peut être simplifié si on suppose selon l'idée de Townsend que l'étirement n'a qu'un effet négligeable pour le spectre du cœur et qu'on met τ_1 à zéro :

$$\begin{aligned} E_0(k) &= \frac{C\Gamma_0}{(2\pi)^3} k^{-1} \int_{T(\tau_1)}^{T(\tau_2)} \exp\left(-\frac{2\nu k^2}{s(1+sT)}\right) \\ &\simeq \frac{C\Gamma_0}{(2\pi)^3} \tau_2 k^{-1} \exp\left(-\frac{2\nu k^2}{s}\right), \end{aligned} \quad (31)$$

soit l'équation (2.25).

Bibliographie

- [1] P. Abry, S. Fauve, P. Flandrin, C. Laroche, “Analysis of pressure fluctuations in swirling turbulent flows”, *J. de Physique II France* **4**, pp.725-733 (1994).
- [2] P. Abry, *Ondelettes et turbulences*, Diderot Éditeur (1997).
- [3] J.R. Angilella, J.C. Vassilicos, “Time-dependant geometry and energy distribution in a spiral vortex layer”, *Phys. Rev. E* **59** (5), pp. 5427-5439 (1999).
- [4] A. Arnéodo, F. Argoul, E. Bacry, J. Elezgaray, J.F. Muzy, *Ondelettes, multifractales et turbulences*, Diderot Éditeur (1995).
- [5] A. Arnéodo, E. Bacry, S. Jaffard, J.F. Muzy, “Oscillating singularities on cantor sets : a grand-canonical multifractal formalism”, *J. of Stat. Phys.*, Vol. 87 (1), pp. 179-209 (1997).
- [6] G.K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press (1967).
- [7] F. Belin, J. Maurer, P. Tabeling, H. Willaime, “Observation of intense filaments in fully developed turbulence”, *J. Phys. II france* **6**, pp. 573-583 (1996).
- [8] R. Benzi, G. Patarnello, P. Santangelo, *J. of Phys. A*, **21**, pp. 1221 (1988).
- [9] J. Bertrand, P. Bertrand, J.-P. Ovarlez, “The Mellin transform” (1996).
- [10] A. Bhattacharjee, Xiaogang Wang, “Finite-time singularity in a model of three-dimensional Euler flows”, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 69 (15), pp. 2196-2199 (1992).
- [11] A. Bhattacharjee, C.S. Ng, Xiaogang Wang, “Finite-time vortex singularity and Kolmogorov spectrum in a symmetric three-dimensional spiral model”, *Phys. Rev. E*, Vol. 52 (5), pp. 5110-5123 (1995).
- [12] M.E. Brachet, “Géométrie des structures à petite échelle dans le vortex de Taylor-Green”, *C. R. acad. Sci. Paris*, t. 311, Série II, pp. 775-780 (1990).
- [13] M.E. Brachet, “Direct numerical simulation of three-dimensional; turbulence in the Taylor-Green vortex”, *Fluid Dyn. res.* **8**, pp. 1-8 (1991).
- [14] J.D. Buntine, D.I. Pullin, “Merger and cancellation of strained vortices”, *J. Fluid Mech.* **205**, pp. 263-295 (1989).
- [15] P. Chainais, *Étude des structures de basse pression dans un écoulement turbulent*, rapport de DEA, Laboratoire de Physique, ENS Lyon (1997).
- [16] P. Chainais, P. Abry, J.-F. Pinton, “Intermittency and coherent structures in a swirling flow : a wavelet analysis of joint pressure and velocity measurements”, submitted to *Phys.Fluids* (1999).

- [17] P. Constantin, I. Procaccia, D. Segel, "Creation and dynamics of vortex tubes in three-dimensional turbulence", *Phys. Rev. E*, Vol. 51 (4), pp. 3207-3222 (1995).
- [18] S. Corrsin, "Turbulent dissipation fluctuations", *Phys. Fluids* **5**, pp. 1301-1302 (1962).
- [19] B. Derroncourt, J.-F. Pinton, S. Fauve, "Experimental study of vorticity filaments in a turbulent swirling flow", *Physica D* **117**, pp. 181-190 (1998).
- [20] S. Douady, Y. Couder, M.E. Brachet, "Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence", *Phys. Rev. Lett.* **67**, pp. 983-986 (1991).
- [21] R.M. Everson, K.R. Sreenivasan, "Accumulation rates of spiral-like structures in fluid flows", *Proc. R. Soc. Lond. A*, **437**, pp. 391-401 (1992).
- [22] K. Falconer, *Fractal geometry - Mathematical Foundations and applications*, Wiley (1990).
- [23] M. Farge, M. Holschneider, "Interpretation of two-dimensional turbulence energy spectrum in terms of quasi-singularity in some vortex cores", *Europhys. Lett.*, Vol. 15 (7), pp. 737-743 (1991).
- [24] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press (1995).
- [25] A.D. Gilbert, "Spiral structures and spectra in two-dimensional turbulence", *J. Fluid Mech.* **193**, pp.475-497 (1988).
- [26] A.D. Gilbert, "A cascade interpretation of Lundgren's stretched spiral vortex model for turbulent fine structure", *Phys. Fluids* **25**, pp. 2831-2834 (1993).
- [27] R. Grauer, T.C. Sideris, "Finite time singularities in ideal fluids with swirl", *Physica D* **88**, pp. 116-132 (1995).
- [28] A.K.M. Fazole Hussain, "Coherent structures and turbulence", *J. Fluid Mech.* **173**, pp. 303-356 (1986).
- [29] J.C.R. Hunt, J.C. Vassilicos, "Kolmogorov's contributions to the physical understanding of small-scale turbulence and recent developments", *Proc. R. Soc. Lond. A* **434**, pp. 183-210 (1991).
- [30] J.C.R. Hunt, N.K.-R. Kevlahan, J.C. Vassilicos, M. Farge, "Wavelets, Fractals and Fourier Transforms: detection and analysis of structures", in *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*, M. Farge, J.C.R. Hunt, J.C. Vassilicos ed., Oxford: Clarendon Press (1993).
- [31] N.K.-R. Kevlahan, J.C. Vassilicos, "The space and scale dependencies of the self-similar structure of turbulence", *Proc. R. Soc. Lond. A* **447**, pp. 341-363 (1994).
- [32] J. Jiménez, A.A. Wray, P.G. Saffman, R.S. Rogallo, "The structures of intense vorticity in isotropic turbulence", *J. Fluid Mech.* **255**, pp. 65-90 (1993).
- [33] J. Jiménez, "Small scale intermittency in turbulence", *Eur. J. Mech. B/Fluids* **17**(4), pp. 405-419 (1998).
- [34] T. Kambe, "Spiral vortex solution of Birkhoff-Rott equation", *Physica D* **37**, pp. 163-473 (1989).
- [35] S. Kida, M. Takaoka, "Vortex reconnection", *Ann. Rev. Fluid Mech.* **26**, pp.169-189 (1994).

- [36] A.Y. Kuo, S. Corrsin, “Experiment on the geometry of the fine-structure regions in fully turbulent fluids”, *J. Fluid Mech.* **56**(3), pp. 447-479 (1972).
- [37] L. Landau, E. Lifschitz, *Mécanique des fluides - Physique théorique tome 6*, deuxième édition, Éditions Mir (1989).
- [38] T.S. Lundgren, “Strained spiral vortex model for turbulent fine structure”, *Phys. Fluids* **25**(12), pp. 2193-2203 (1982).
- [39] T.S. Lundgren, “A small-scale turbulence model”, *Phys. Fluids A* **5**(6), pp. 1472-1483 (1993).
- [40] A. Majda, “Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow”, *Comm. on Pure and Applied Math.*, Vol. **XXXIX**, pp. S187-S220 (1986).
- [41] H.K. Moffatt, “Simple topological aspects of turbulent velocity dynamics”, in *Turbulence and chaotic phenomena in fluids*, pp. 223-230, T. Tatsumi ed., Elsevier (1984).
- [42] H.K. Moffatt, “Spiral structures in turbulent flows”, in *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*, M. Farge, J.C.R. Hunt, J.C. Vassilicos ed., Oxford: Clarendon Press (1993).
- [43] H.K. Moffatt, S. Kida, K. Ohkitani, “Stretched vortices - the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics”, *J. Fluid Mech.* **259**, pp. 241-264 (1994).
- [44] F. Nicolleau, J. C. Vassilicos, “Wavelets for the study of intermittency and its topology”, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* (1998).
- [45] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, third edition, McGraw-Hill International Editions (1991).
- [46] P. Petitjeans, J.H. Robres, J.E. Wesfreid, N. Kevlahan, “experimental evidence for a new type of stretched vortex”, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **17** (4), pp. 549-560 (1998).
- [47] J.-F. Pinton, R. Labbé, “Correction to the Taylor hypothesis in swirling flows”, *J. Phys. II France* **4**, pp. 1461-468 (1994).
- [48] D.I. Pullin, P.G. Saffman, “On the Lundgren-Townsend model of turbulent fine-scale”, *Phys. Fluids A* **5**(1), pp. 126-145 (1993).
- [49] D.I. Pullin, P.G. Saffman, “Reynolds stresses and one-dimensional spectre for a vortex model of homogeneous anisotropic turbulence”, *Phys. Fluids* **6**(5), pp. 1787-1796 (1994).
- [50] D.I. Pullin, D. Buntine, P.G. Saffman, “On the spectrum of a stretched spiral vortex”, *Phys. Fluids* **6**(9), pp. 3010-3027 (1994).
- [51] D.I. Pullin, “Pressure spectra for vortex models of fine-scale homogeneous turbulence”, *Phys. Fluids* **7**(4), pp. 849-856 (1995).
- [52] D.I. Pullin, P.G. Saffman, “Vortex Dynamics in turbulence”, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. **30**, pp. 31-51 (1998).
- [53] S. Roux, J.-F. Muzy, A. Arnéodo, “Detecting vorticity filaments using wavelet analysis: about the statistical contribution of vorticity filaments to intermittency in swirling turbulent flows”, *Eur. Phys. J. B* **8**, pp. 301-322 (1999).
- [54] P.G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press (1992).

- [55] P.G. Saffman, D.I. Pullin, “Anisotropy of the Lundgren-Townsend model of fine-scale turbulence”, *Phys. Fluids* **6**(2), pp. 802-807 (1994).
- [56] P.G. Saffman, D.I. Pullin, “Calculation of velocity structure functions for vortex models of isotropic turbulence”, *Phys. Fluids* **8**(11), pp. 3072-3084 (1996).
- [57] K.W. Schwarz, “Evidence for Organized small-scale structure in fully developed turbulence”, *Phys. Rev. Lett.* **64**(4), pp. 415-418 (1990).
- [58] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les Sciences physiques*, Herrman (1965).
- [59] D. Segel, “The higher moments in the Lundgren model conform with Kolmogorov scaling”, *Phys. Fluids* **7**(12), pp. 3072-3077 (1995).
- [60] Z.-S. She, E. Jackson, S.A. Orszag, “Intermittent vortex structures in homogeneous isotropic turbulence”, *Nature* **344**, pp.226-228 (1990).
- [61] Z.-S. She, E. Lévêque, “Universal scaling laws in fully developed turbulence”, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 72 (3), pp. 336-339 (1994).
- [62] L. Shtilman, M. Spector, A. Tsinober, “On some kinematics versus dynamics properties of homogeneous turbulence”, *J. Fluid Mech.* **247**, pp. 65-77 (1993).
- [63] K.R. Sreenivasan, “Fractals and multifractals in fluid turbulence”, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **23**, pp. 539-600 (1991).
- [64] H. Tennekens, “Simple model for the small-scale structure of turbulence”, *Phys. Fluids* **11**(3), pp. 669-671 (1968).
- [65] A.A. Townsend, “On the fine-scale structure of turbulence”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **208**, pp. 534-542 (1951).
- [66] A. Tsinober, “Is concentrated vorticity that important?”, *European J. of Mech. B/Fluids*, vol. 17 (4), pp 421-449 (1998).
- [67] J.C. Vassilicos, J.C.R. Hunt, “Fractal dimensions and spectra of interfaces with application to turbulence”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **435**, pp. 505-534 (1991).
- [68] J.C. Vassilicos, “Fractals in turbulence”, in *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*, M. Farge, J.C.R. Hunt, J.C. Vassilicos ed., Oxford: Clarendon Press (1993).
- [69] J.C. Vassilicos, J.G. Brasseur, “Self-similar spiral flow structure in low Reynolds number isotropic and decaying turbulence”, *Phys. Rev. E* **54** (1), pp. 467-485 (1996).
- [70] P.L. Vermeer, J.A.H. Alkemade, “Multiscale segmentation of well logs”, in *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*, M. Farge, J.C.R. Hunt, J.C. Vassilicos ed., Oxford: Clarendon Press (1993).
- [71] A. Vincent, M. Meneguzzi, “The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence”, *J. Fluid Mech.* **225**, pp. 1-20 (1991).
- [72] H. Willaime, F. Belin, P. Tabeling, “Structures and transition in high Reynolds number experiment”, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **4**, pp. 489-504 (1998).

Table des matières

Introduction	1
1 Description à base de structures cohérentes de signaux de turbulence?	2
1.1 Décrire la turbulence	2
1.2 Recherche de comportements significatifs	3
1.2.1 Par l'étude de la dynamique des fluides	3
Modèles construits à partir de vortex	4
1.2.2 Nécessité d'un comportement singulier de la vitesse	5
Singularités explosives	7
1.3 Singularités oscillantes et structures cohérentes	8
1.3.1 Approche de Vassilicos et Hunt	9
1.3.2 Fonctions de Mellin et spirales logarithmiques	12
1.3.3 Quelles spirales apparaissent en dynamique des fluides?	13
2 Vortex de Lundgren	15
2.1 Solution de Lundgren	15
2.1.1 Les présupposés du modèle	15
2.1.2 Solution en spirale de l'équation 2D	16
2.1.3 Étude du champ de vitesse	18
2.1.4 Retour sur le champ de déformation	20
2.1.5 La solution en vortex de Burgers	21
2.2 Propriétés spectrales de la solution	21
2.2.1 Expression du spectre d'énergie	21
2.2.2 Les résultats montrés à la suite de ce modèle	23
2.3 Étude numérique des différents modèles	25
2.3.1 Les modèles étudiés	25
2.3.2 Mesure et représentation du spectre	27
2.3.3 Quelles formes de spirale?	27
3 Mesure de la vitesse d'un vortex de Lundgren	31
3.1 Motivation	31
3.2 Mesure en un point d'un vortex d'orientation quelconque	31
3.2.1 Calcul du champ de vitesse	31
3.2.2 Orientation d'un vortex	32
3.2.3 Validation de la procédure	33
3.3 Fixer les paramètres des objets	34
3.4 Essais de simulation d'un signal de vitesse	35
Conclusion	37
Annexe	38
Calcul du spectre pour la solution de Lundgren	38
Spectre du cœur du vortex	40
Bibliographie	41