

# Symétrie des champs bidimensionnels et générateurs stationnaires

Pierre Borgnat\*

Signal and Image Processing Group, ISR,  
Instituto Superior Técnico, Lisboa (Portugal)

Journées d'étude sur les *Méthodes pour les signaux complexes en traitement d'image*,  
INRIA Rocquencourt, 9 et 10 décembre 2003

## Résumé

Ce travail trouve son origine dans les études de l'auto-similarité par des déformation stationnarisantes et porte sur des extensions aux champs bidimensionnels. Les symétries de champs 2D, images ou représentations à 2 paramètres d'un signal, sont envisagées, en particulier celle liées à l'invariance d'échelle. Nous donnons des résultats préliminaires portant sur les déformations stationnarisantes à deux dimensions, les modèles que l'on peut en déduire et montrons quelques exemples numériques portant sur la synthèse de tels champs, et l'analyse des déformations.

## 1 Introduction : à propos des méthodes de stationnarisation

### 1.1 Symétries en échelle de signaux et images

La motivation générale de ce travail vient de l'étude des propriétés d'invariance d'échelle de signaux [26] ou d'images [22]. L'idée que des objets se ressemblent quel que soit le niveau de détails, ou le zoom, qu'on utilise est courante en physique, en analyse du signal ou imagerie pour modéliser des systèmes complexes, par exemple avec un spectre étendu en  $1/f$ .

La propriété d'invariance d'échelle dans le contexte de champs aléatoires bidimensionnels se comprend de plusieurs manières. Une image comporte grossièrement deux types de propriétés : les objets qu'elle représente qui s'appuient sur de la géométrie, et leurs textures plus ou moins aléatoires. C'est ce deuxième aspect des images qui se prête à une modélisation possible comme un champ aléatoire à deux dimensions, en laissant de côté les formes, les contours et leur détection. Il est courant de définir une texture comme un champ obéissant à une symétrie précise : homogénéité par telle ou telle translation, isotropie, ou invariance d'échelle [22].

Dans des domaines de physique, certains champs spatiaux peuvent directement s'étudier comme des réalisations aléatoires dans le cadre d'un modèle et doivent de plus obéir aux contraintes de symétrie du système, par exemple en échelle [2]. Une situation célèbre est celle du champ de vitesse d'un fluide en cas de turbulence pleinement développée, homogène, isotrope et stationnaire. En supposant une propriété d'invariance d'échelle des incréments de vitesse, Kolmogorov a montré que cela prescrivait un modèle pour les statistiques de la vitesse, voir [11]. Réaliser ou analyser des champs ayant ces propriétés a alors un intérêt net. L'analyse de données géostatistiques, où la symétrie est souvent une stationnarité déformée, peut s'étudier à l'aide des mêmes outils de stationnarisation que nous présentons dans la suite [17].

Un autre contexte conduisant à s'intéresser à des champs aléatoires à deux variables est celui des décompositions à deux paramètres d'un signal monodimensionnel. Ces décompositions, génériquement de type temps-fréquence ou temps-échelle (ondelettes par exemple) [9], sont des champs à deux variables, une de temps et l'autre d'échelle ou de fréquence, qui vérifient des propriétés de symétries induites par celles du signal représenté.

### 1.2 Stationnarisation des processus ; transformation de Lamperti

Différents travaux ont proposé d'étudier les signaux aléatoires à symétrie donnée en s'appuyant sur la possibilité de trouver un signal transformé qui serait stationnaire. Avant de s'y intéresser pour des champs à 2 paramètres, rappelons ces principes pour les signaux 1D.

---

\*P. Borgnat remercie l'INRIA qui finance son séjour par une bourse INRIA de post-doc à l'étranger. Email [Pierre.Borgnat@ens-lyon.org](mailto:Pierre.Borgnat@ens-lyon.org)

Soit un processus aléatoire  $X(t)$ . On s'intéresse à une transformation  $\mathcal{T}$  telle que l'image  $Y(u) = (\mathcal{T}X)(u)$  est stationnaire [20, 7, 4]. Rappelons que  $\{Y(u), u \in \mathbb{R}\}$  est stationnaire [29] si et seulement si il est invariant par toutes les translations temporelles, donc  $(\mathcal{S}_\tau Y)(t) \doteq Y(t + \tau) \stackrel{d}{=} Y(t)$  pour tout  $\tau$ . L'égalité  $\stackrel{d}{=}$  tient pour toutes ses lois de probabilités multidimensionnelles du processus. Dans la suite, la discussion sera limitée aux signaux gaussiens de sorte que seules les statistiques d'ordre 1 et 2 (égalité probabiliste au sens large) sera mise en jeu. En particulier, on regarde les propriétés de la covariance du processus,  $R_X(t, s) = \mathbb{E}\{X(t)X(s)\}$ , où  $\mathbb{E}$  est l'espérance pour le processus. Pour un processus stationnaire  $Y(u)$ , elle devient une fonction d'une variable, car alors  $R_Y(u, v) = \Gamma_Y(u - v)$ , et  $\Gamma_Y$  est une fonction définie positive.

**Les déformations temporelles.** Une première série de travaux [20, 7] a étudié les transformations stationnarisante  $\mathcal{T}$  qui peuvent s'écrire à l'aide d'une déformation du temps  $\phi(t)$  telle que :

$$X(t) = Y(\phi(t)) \quad \text{soit} \quad Y(u) = (\mathcal{T}X)(u) = X(\phi^{-1}(t)).$$

Ainsi la covariance de  $X$  prend la forme nécessaire  $R_X(t, s) = \Gamma_Y(\phi(t) - \phi(s))$ . O. Perrin [18, 20] a posé la question de la validité de cette forme et a avancé des conditions sur  $R_X$  sous lesquelles on sait alors que cette écriture est possible, avec  $Y$  stationnaire. Cette dernière propriété implique que  $\phi$  n'est pas déterminé uniquement. En effet, si  $\phi(t)$  convient, alors toute forme  $\alpha\phi(t) + \beta$  convient si  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ , en prenant  $\Gamma_Y(u/\alpha)$ . La déformation est donc invariante affine. La classe d'équivalence est alors caractérisée par le rapport  $\phi''/\phi'$ .

À cette équivalence près, la classe de la déformation  $\phi(t)$  est uniquement définie si  $\Gamma'_Y(u) < 0$  pour  $u$  dans un certain intervalle  $]0, \epsilon[$ . L'identification par la suite de la déformation temporelle a été étudiée dans [18] ainsi que dans [7], et des formes précises d'estimateurs ont été avancées. Nous y reviendrons par la suite.

**Transformation de Lamperti et auto-similarité.** Dans le contexte des processus aléatoires autosimilaires, une étude analogue a été menée sur une déformation temporelle précise. Rappelons qu'un processus  $\{X(t), t \in \mathbb{R}_*^+\}$ , est dit auto-similaire d'exposant  $H$  (ou  $H$ -ss) [26] si il est invariant par dilatation, soit  $\{(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t), t \in \mathbb{R}_*^+\} \stackrel{d}{=} \{X(t), t \in \mathbb{R}_*^+\}$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ ; on a défini ici les dilatations  $\mathcal{D}_{H,\lambda}$  comme  $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) = \lambda^{-H}X(\lambda t)$ . J. Lamperti a remarqué que la simple transformation inversible  $\mathcal{L}_H$ , dite maintenant de Lamperti [14] :

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t) = X(t), \quad t > 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{L}_H^{-1} X)(u) = e^{-Hu} X(e^u) = Y(u), \quad t \in \mathbb{R}$$

transforme un processus stationnaire  $Y$  en un processus  $X$  auto-similaire d'exposant  $H$  et inversement. Cette transformation est une déformation temporelle  $\phi(t) = \ln t$  ajoutée à une renormalisation par  $t^H$ , et elle vérifie les conditions précédents d'unicité à une transformation affine près (unicité prouvée spécifiquement pour la transformation de Lamperti dans [5]).

La spécificité de la stationnarisation pour l'auto-similarité est qu'elle réalise une équivalence unitaire entre groupes de transformations [10]. On a en effet :

$$\mathcal{L}_H^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln \lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H \mathcal{S}_\tau \mathcal{L}_H^{-1} = \mathcal{D}_{H, e^\tau}. \quad (1)$$

L'analyse harmonique des représentations de groupes [12], qui pour les processus stationnaires porte sur le groupe des  $\mathcal{S}_\tau$ , c'est-à-dire est la transformée de Fourier, est alors reportée sur l'analyse harmonique pour le groupes de  $\mathcal{D}_{H,\lambda}$  : la transformation de Mellin. On peut alors formuler des résultats de représentation et d'analyse des processus autosimilaires à l'aide de leur décomposition spectrale de Mellin [10, 4].

Dès lors que l'on dispose d'un générateur stationnaire au processus de départ, soit  $Y = \mathcal{L}_H^{-1} X$  pour un processus  $H$ -ss ou  $Y = \mathcal{T}^{-1} X$  pour une déformation temporelle autre, deux opérations sur  $X$  trouvent une formulation différente et intéressante. D'abord des méthodes de synthèse efficaces du générateur stationnaire de  $X$  à l'aide de méthodes rapides de synthèse stationnaire; ensuite le problème d'estimation de la covariance, délicate pour un processus non stationnaire, est rendu possible en passant par l'intermédiaire de l'estimation stationnaires de corrélation sur le processus transformé  $Y$ .

Ce rapport porte sur une analyse préliminaire de l'extension des résultats rapportés à une dimension, aux champs bidimensionnels. Nous allons d'abord étudier des cas où la stationnarisation est possible, avant d'employer les méthodes précédentes en 2D quand un générateur stationnaire existe.

## 2 Symétries de champs bidimensionnels

### 2.1 Éléments de classification des symétries et stationnarisation

**Forme des covariances sous une symétrie donnée.** Nous noterons  $X(\underline{u})$  un champ à deux dimensions, et  $\underline{u} = (u_1, u_2)$  les variables d'espace. Soit un groupe  $\mathbf{G}$  de transformations du plan  $\mathcal{G}$  qui s'écrivent  $(\mathcal{G}X)(\underline{u}) = f(\underline{u})X(g(\underline{u}))$ . Que peut-on dire des champs aléatoires  $X$  qui sont invariants sous ces transformations, c'est-à-dire  $(\mathcal{G}X)(\underline{u}) \stackrel{d}{=} X(\underline{u})$  ?

La première conséquence est de simplifier l'expression de la covariance. On a en effet

$$R_X(\underline{u}, \underline{v}) = \mathbb{E} \{X(\underline{u})X(\underline{v})\} = f(\underline{u})f(\underline{v})\mathbb{E} \{X(g(\underline{u}))X(g(\underline{v}))\}.$$

Si le groupe est transitif sur le plan, c'est-à-dire que pour tout couple  $\underline{u}, \underline{v}$  de points du plan, on peut trouver une transformation qui passe de l'un à l'autre, soit  $\underline{v} = g_0(\underline{u})$ , l'équation devient

$$R_X(\underline{u}, g_0(\underline{u})) = f(\underline{u})f(g_0(\underline{u}))\mathbb{E} \{X(g(\underline{v}))X(g_0g(\underline{v}))\}.$$

Cette égalité est vraie pour tout  $g$  et  $\underline{u}$  donc, en choisissant  $g$  qui amène  $\underline{u}$  à un point fixe  $\underline{u}_0$  (par exemple l'origine),  $R_X(\underline{u}, g_0(\underline{u}))/[f(\underline{u})f(g_0(\underline{u}))]$  est alors égal à  $\mathbb{E} \{X(\underline{u}_0)X(g(\underline{u}_0))\}$  et ne dépend que de  $g$ . Pour les groupes transitifs donc, la corrélation a la forme générale

$$R_X(\underline{u}, g(\underline{u})) = f(\underline{u})f(g(\underline{u}))F(g). \quad (2)$$

Noter que si le groupe n'est pas transitif, il faut rajouter  $\underline{u}_0$  comme paramètre supplémentaire (qui définit la classe de transitivité, ou l'orbite, dans laquelle se trouve  $\underline{u}$ ).

**Stationnarisation.** Supposons que l'on dispose de plus d'une transformation stationnarisante  $\mathcal{T}$  telle que au moins un sous-groupe de  $\mathbf{G}$  est mis en correspondance avec les translations, selon une propriété analogue à (1). Pour garder des notations simples, nous notons  $g$  les paramètres d'une transformation, et on a  $\mathcal{G} = \mathcal{T}\mathcal{S}_\tau\mathcal{T}^{-1}$  pour un certain  $\tau = (\tau_1, \tau_2) = \phi(g)$ . On sait alors mieux préciser cette fonction. Il existe  $Y(\underline{a})$  tel que  $X(\underline{u}) = (\mathcal{T}Y)(\underline{u}) = h(\underline{u})X(\phi(\underline{u}))$ , et la covariance de  $X$  s'écrit :

$$R_X(\underline{u}, \underline{v}) = h(\underline{u})h(\underline{v})R_Y(\phi(\underline{u}), \phi(\underline{v})) = h(\underline{u})h(\underline{v})\Gamma_Y(\phi(\underline{u}) - \phi(\underline{v})).$$

En reprenant la même analyse que ci-dessus, on arrive à l'équation (2) avec une précision supplémentaire sur la fonction restante :

$$R_X(\underline{u}, g(\underline{u})) = h(\underline{u})h(g(\underline{u}))\Gamma_Y(\phi(g)). \quad (3)$$

**Quelques groupes de symétries.** Les transformations affines planes ont été rigoureusement étudiées dans [8]. Trouver une transformation pour passer d'un point à l'autre du plan revient à devoir résoudre une équation linéaire  $\underline{v} = \underline{G}\underline{u} + \underline{\tau}$  à 6 inconnues avec  $\underline{G}$  une matrice 2x2 inversible. Les cas intéressants sont les suivants.

1. Les groupes à 1 paramètre ne sont pas transitifs, par exemple les rotations du plan, les homothéties ou les translations selon une direction. Une symétrie sous l'un d'eux ne suffit pas à définir complètement la covariance comme en (2).
2. Les groupes à 2 paramètres sont toujours transitifs. Il existe deux types de groupes simples, différenciés par leur algèbre de Lie : ceux qui sont isomorphes au groupe  $(\mathbb{R}^2, +)$  et ceux qui sont isomorphes au groupe affine<sup>1</sup>. Au nombre des premiers il y a les translations du plan, les dilatations séparées sur chaque axe, les homothéties-rotations autour d'un centre fixé.
3. Les groupes à 3 paramètres sont intéressants car transitifs mais avec des classes d'équivalence plus grandes. En général la corrélation ne dépendra alors plus que d'un paramètre. C'est le cas du groupe des déplacements du plan (rotations de centre quelconque et translations) et de celui des homothéties de centre quelconque avec les translations.
4. Les groupes à 4 paramètres au moins donnent des champs triviaux puisqu'alors tout couple de point  $(\underline{u}, \underline{v})$  peut être transformé en n'importe quel autre couple  $(\underline{u}', \underline{v}')$  et le champ doit avoir la même corrélation partout ; elle doit alors rester nulle et le champ est un bruit blanc.

<sup>1</sup>Le groupe affine est  $(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}, \cdot)$  avec la loi  $(t, a) \cdot (t', a') = (at + t', aa')$ .

On sait que, pour les cas 2 et 3 qui nous intéressent, les groupes sont stationnariables si ils sont construit à partir de l'algèbre de Lie de  $(\mathbb{R}^2, +)$ . Les dilatations sur chaque axe telles que  $\underline{g}(\underline{u}) = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2)$  sont équivalentes au translation en utilisant la déformation  $\underline{a} = \underline{\phi}_A(\underline{u}) = (\ln u_1, \ln u_2)$ . Le groupe des homothéties-rotations qui agit par une rotation d'angle  $\alpha$ , de centre 0, notée  $\underline{R}_\alpha$  :  $\underline{g}(\underline{u}) = \lambda \underline{R}_\alpha \underline{u}$ . En coordonnées polaires  $(r, \theta) = (\sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \text{atan}(u_2/u_1))$ , l'action est représentée par la transformation  $\underline{g}(\underline{u}) = \underline{g}(r_{\underline{u}}, \theta_{\underline{u}}) = (\lambda r_{\underline{u}}, \theta_{\underline{u}} + \alpha)$ , et est mis en correspondance stationnaire à l'aide de la déformation temporelle  $\underline{\phi}_B(\underline{u}) = (\ln \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \theta_{\underline{u}})$ ; la déformation des paramètres d'une transformation est alors  $\underline{\phi}_B(\underline{g}) = (\ln \lambda, \alpha)$ . Dans ces cas, les principes généraux conduisant à (3) s'appliquent et les champs prennent cette forme de covariance. Les deux déformations introduites  $\underline{\phi}_A$  et  $\underline{\phi}_B$  sont les deux manières naturelles de généraliser à 2D la déformation  $\ln t$  qui servait à la transformation de Lamperti. Ce sont ainsi deux déformations qui reviennent dans la suite.

**Cas des déplacement et des homothéties-translations.** Le groupe **D** des déplacements du plan ont la forme  $\underline{g}^D(\underline{u}) = \underline{R}_\alpha \underline{u} + \underline{c}$ , ou bien peuvent être considérés comme des rotations de centre quelconque. Celui **H** des homothéties-translations s'écrivent :  $\underline{g}^H(\underline{u}) = \lambda \underline{u} + \underline{c}$ , ou bien peuvent être étudiées comme les homothéties de centre quelconque.

Ces groupes à 3 paramètres sont stationnariables de plusieurs manières. **D** admet déjà les translations comme sous-groupe et l'identité est une déformation suffisante. La question inverse, savoir en quelle symétrie ce groupe se transforme par  $\underline{\phi}_A$  et  $\underline{\phi}_B$ , précise des modèles de champs stationnariables en un champ isotrope [19]. Un rapide calcul implique que si le générateur stationnaire  $Y$  est invariant sous les déplacements du plan, alors  $X$  obtenu à l'aide de  $\underline{\phi}_A$  est invariant sous les transformations ci-dessous, et sa covariance doit prendre la forme indiquée à côté.

$$\underline{g}(\underline{u}) = (\lambda_1 u_1^{\cos \alpha} u_2^{-\sin \alpha}, \lambda_2 u_1^{\sin \alpha} u_2^{\cos \alpha}) \quad \text{et} \quad R_X(\underline{u}, \underline{v}) = |\underline{u}|^H |\underline{v}|^H \Gamma_Y \left( |(\ln u_1/v_1, \ln u_2/v_2)| \right).$$

On suppose ici que la renormalisation est analogue à l'auto-similarité, en  $h(\underline{u}) = |\underline{u}|^H$ , ce que nous supposons dans la suite. En employant la déformation  $\underline{\phi}_B$ , la transformation et la covariance ont respectivement les formes qui suivent, en passant en représentation complexe du plan :

$$\underline{g}(\underline{u}) = \lambda_1(\underline{u})^{\cos \alpha - i \sin \alpha} e^{i \lambda_2} \quad \text{et} \quad R_X(\underline{u}, \underline{v}) = |\underline{u}|^H |\underline{v}|^H \Gamma_Y \left( |(\ln r_{\underline{u}}/r_{\underline{v}}, \theta_{\underline{u}} - \theta_{\underline{v}})| \right).$$

Ces formes de corrélation sont alors des modèles de champs auto-similaires et isotropiquement stationnariables.

Les mêmes calculs se font pour le groupe **H** et conduisent aux invariances par les transformations suivantes :  $\underline{g}(\underline{u}) = (\lambda_1 u_1^k, \lambda_2 u_2^k)$  à l'aide de la déformation  $\underline{\phi}_A$ ;  $\underline{g}(\underline{u}) = \lambda_1(\underline{u})^k e^{i \lambda_2}$  en utilisant à la place  $\underline{\phi}_B$ .

## 2.2 Exemple : drap brownien fractionnaire

De même que le mouvement brownien fractionnaire [15] est un exemple incontournable de processus  $H$ -ss, son extension à 2D est un exemple intéressant. Les draps browniens fractionnaires  $B_H(\underline{u})$  sont des champs gaussiens, à accroissements stationnaires et tels que :

$$R_{B_H}(\underline{u}, \underline{v}) = \frac{\sigma^2}{2} (|\underline{u}|^{2H} + |\underline{v}|^{2H} - |\underline{u} - \underline{v}|^{2H}).$$

Ces champs sont auto-similaires au sens des homothéties, c'est-à-dire que  $B_H(\lambda \underline{u}) \stackrel{d}{=} |\underline{u}|^H B_H(\underline{u})$  et sont invariants par rotation. Leur groupe de symétrie est donc celui des homothéties-rotations. Du fait de ce qui précède, on dispose d'une transformation stationnarisante telle qu'il existe un champ  $Y(\underline{a})$  stationnaire et  $(B_H)(\underline{u}) = (TY)(\underline{u}) = |\underline{u}|^H Y(\underline{\phi}_B(\underline{u}))$ .

La fonction de corrélation du champ stationnaire est calculable à partir de la covariance de  $B_H$  et en utilisant la déformation, pour arriver à l'expression :

$$\Gamma_Y(\underline{a}) = \sigma^2 \left( \cosh(H a_1) - 2^{2H-1} (\sinh^2 \frac{a_1}{2} + \sin^2 \frac{a_2}{2})^H \right). \quad (4)$$

Elle généralise en 2D l'expression de la corrélation du générateur stationnaire du mouvement brownien fractionnaire [10], que l'on retrouve en fixant  $a_2 = 0$  dans l'expression ci-dessus. Le champ générateur  $Y$  est, de même qu'il l'a été montré à 1D, un champ à courte dépendance spatiale dont la fonction de corrélation décroît exponentiellement. Les coupes le long d'une direction sont des processus qui généralisent celui d'Ornstein-Uhlenbeck. En revanche, il faut noter que ce champ qui est stationnaire n'est pas isotrope en ses variables  $a_1$  et  $a_2$ . Ceci se conforme à ce qui a été dit au paragraphe où les groupes **D** et **H** ont été étudiés :  $B_H$  devrait avoir une symétrie sous les transformations calculées pour être isotropiquement stationnariables, ce qu'il n'a pas. Noter que ceci est démontré dans [21] à l'aide de la forme (4).

## 2.3 Symétries des champs représentations temps-fréquence ou échelle

Une représentation à 2 paramètres, notée ici  $D_X(t, \alpha)$ , d'un processus 1D peut se construire par l'application d'un opérateur au signal construit sur deux transformations regroupées. La classe temps-fréquence s'appuie sur les translations en temps et en fréquence, groupe isomorphe à  $(\mathbb{R}, +)$  tandis que les variables temps-échelle s'appuient sur les translations en temps et les dilatations qui correspondent au groupe affine. On peut varier les représentations en prenant comme opérateur une autre déformation temporelle, de la forme  $(U_\phi)X(t) = \sqrt{\phi'(t)}X\phi(t)$ , un changement d'horloge [3] ou modulation [13], qui donnent d'autres représentations mixtes. Par exemple la classe temps-échelle de Mellin est construite sur la déformation de la transformation de Lamperti [4].

Ces représentations ayant alors une covariance intrinsèque vis-à-vis de certaines transformations, elles héritent de propriétés de symétrie du processus unidimensionnel sous l'effet des ces transformations ; ce sont des symétries de champs 2D. Par exemple, les transformées en ondelette, de la classe temps-échelle, de processus  $H$ -ss et à accroissements stationnaires sont des champs invariants sous les déplacements affines [25, 16] :  $D_X(t, \alpha) \stackrel{d}{=} D_X(\lambda t + \tau, \lambda\alpha)$ . Ces déplacements, découlant du groupe affine, ne sont pas stationnalisables au sens précédent. On ne peut pas utiliser directement l'étude présente et une question ouverte reste de savoir construire efficacement des champs aléatoires à deux paramètres ayant une invariance affine.

Enfin, cette manière d'obtenir des champs 2D avec invariance prescrite complique le problème car la redondance de  $D_X$  venant du fait que l'information du signal est déployée sur un plan plus grand, impose à  $D_X$  une structure particulière (souvent de noyau reproduisant) qui agrandit la zone de corrélation du champ. Une deuxième question est donc de projeter les champs ayant les symétries voulues dans l'espace de la représentation en gardant un contrôle sur l'approximation faite.

## 3 Utilisation des générateurs stationnaires

### 3.1 Synthèses de champs aléatoires auto-similaires

Si un champ obéit à une symétrie qui est stationnalisable, il y a avantage à opérer une synthèse du générateur stationnaire plutôt que directement du champ recherché. Il existe en effet plusieurs méthodes pour créer des champs à covariance prescrite non stationnaire. La première est la factorisation exacte de Cholesky, qui a le défaut d'être très lente autant que limitée en taille d'image (il faut travailler sur une matrice de  $N^4$  éléments pour une image de  $N^2$  pixels). Une autre voie, plus efficace, serait de passer par les méthodes de kriegeage, et ses qualités pour la synthèse de textures ont été étudiées dans [8] ; on gagne en rapidité et extension du champ au prix d'une erreur de la corrélation du champ créé.

Ici nous nous appuyons directement sur la possibilité de stationnaliser les champs. La synthèse d'un champ stationnaire  $Y$  peut être réalisée selon les cas par une méthode spectrale (le spectre étant la transformée de Fourier de la corrélation), par l'utilisation d'un modèle auto-régressif si la forme de corrélation souhaitée le permet (par exemple en  $r^{|a_1|}r^{|a_2|}$ , corrélation d'un AR 1 si  $r \in ]0, 1[$ ). Une autre possibilité, employée ici, est adaptée de la synthèse de processus stationnaires gaussiens unidimensionnels : il est possible de réaliser numériquement ces champs en plongeant le vecteur de corrélation dans une matrice circulante [28] dont la diagonalisation, et par suite la factorisation en prenant la racine carré, est rapide. Cette méthode a été récemment reprise et implémentée pour des synthèses de champs 2D [24].

Les images de la figure 1 présentent des exemples de synthèse par ces méthodes, pour différentes prescription de la corrélation et de la symétrie attendue au final. La légende détaille les symétries proposées en illustration. La qualité de synthèse est dans ce rapport rest fondée une appréciation subjective. Cependant, dans le cas des champs browniens, il a été vérifié que la corrélation obtenue est convenable.

### 3.2 Estimation avec les déformations non stationnaires

**Estimation en passant par le générateur stationnaire.** En terme d'analyse, l'intérêt de passer par la transformation stationnalisante adaptée a été remarqué depuis longtemps pour estimer la covariance. Si on connaît la déformation à appliquer, on se ramène à un problème d'estimation (paramétrique ou non) d'une fonction de corrélation stationnaire pour laquelle l'on dispose de méthodes d'estimations classique (et où l'ergodicité tient souvent). C'est une sorte d'estimation paramétrique pour un processus non stationnaire.

Le problème étant bien connu, nous renvoyons par exemple à [8] pour l'utilisation qui en est faite pour l'analyse des textures, à [23, 17] pour les problème correspondant en géostatistique. Noter que, pour l'analyse autosimilaire, l'estimation de  $H$  en utilisant la déformation adaptée qui est la transformation de Lamperti revient à choisir un échantillonnage géométrique du processus  $H$ -ss, comme il avait été proposé dans [27].

**Estimer les déformations stationnarisantes.** L'attrait de ces exemples ne doit cacher le problème principal : on ne connaît souvent pas la déformation à appliquer. L'image attendue a peut-être une symétrie forcée par un modèle mais souvent ce n'est pas le cas, où la symétrie n'est pas exacte mais brisée de tel ou telle manière. La question est alors de savoir, à partir des données, d'estimer la déformation locale à appliquer afin de stationnariser le champ. Cette déformation n'obéit plus forcément alors à une contrainte d'invariance de groupe (qui était le cœur de notre approche théorique) mais gagne en souplesse d'utilisation.

La place limitée dans ce rapport et l'état préliminaire de nos études à ce sujet nous pousse à restreindre les exemples au problème de l'estimation des déformations à 1D, en particulier pour les processus auto-similaires. Les travaux [20, 7] proposent tous deux des méthodes d'estimation de  $\phi(t)$ , le premier à partir des variations quadratiques de la trace du processus, le second à partir de l'estimation de la trajectoire dans un plan temps-échelle qui suit la déformation supposée. Rappelons ces estimateurs.

**Estimateur de O. Perrin** [20].

$$\mathcal{E} \{ \phi \}_P (t) = \frac{v_n(t)}{Nv_n(1)} \quad (5)$$

où  $v_n(x)$  est l'interpolation linéaire des  $V_n(x) = \sum_{k=1}^{[nk]} (X(k/n) - X((k-1)/n))^2$ , variations quadratiques du processus. Cette formule reconstruite en fait une sorte de temps local qui s'ajuste à la vitesse de variation des accroissements.

**Estimateur de M. Clec** [7].

$$\mathcal{E} \left\{ \frac{d}{du} \log \phi' \right\}_C (t) = \mathcal{E} \left\{ \frac{\phi''(t)}{\phi'(t)} \right\}_C = \frac{\partial_u D_X(t, 1/N)}{\partial_{\log s} D_X(t, 1/N)} \quad (6)$$

où  $D_X(u, s) = \mathbb{E} \left\{ \left| \langle X(u), \frac{1}{s} \psi \left( \frac{u-t}{s} \right) \rangle \right|^2 \right\}$ . Cette estimation est celle en fait de la trajectoire principale dans le plan temps-échelle, où le processus est représenté par sa transformation en ondelettes  $D_X(u, s)$ .

La figure 2 illustre le comportement de ces estimateurs pour des processus auto-similaires essentiellement. Le premier exemple, A, est une déformation temporelle simple,  $\phi(t) = t^2$ , d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, situation pour laquelle les deux estimateurs sont très efficaces. Trois autres exemples sont présentés : deux processus auto-similaires (B : un mouvement brownien fractionnaire avec  $H = 0.3$  synthétisé par la méthode de la matrice circulante, et en C : l'image par  $\mathcal{L}_H$  avec  $H = 0.3$  d'un processus stationnaire réalisée par synthèse spectrale) où l'estimation de la déformation  $\ln t$  est moins fiable. On obtient un résultat souvent assez proche mais on constate des déviations majeures en certains points (en particulier avec l'estimateur (5)). Le dernier exemple, D, est un mouvement brownien fractionnaire avec auto-similarité de taille finie, tels qu'ils furent proposés dans [1] ; leur constructions s'appuient sur une déformation qui pose des bornes en échelle à l'invariance du processus. La partie centrale de la déformation en temps en proche d'un logarithme mais diverge aux bords. Les estimateurs détectent convenablement ces pentes abruptes au bord, de manière surprenante puisqu'ils restent normalement à valeur dans  $[0, 1]$ . La conclusion de ces quelques exemples est que, dans leur principe, les estimations des déformations semblent être utilisables pour la propriété d'auto-similarité.

Dans les deux cas ces méthodes ont été étendue au problème des champs 2D [19, 6] et des études complémentaires sur leur utilisations pour les différentes formes d'invariance d'échelle bidimensionnelles seront menées.

Plusieurs questions laissées en suspens ici feront l'objet de recherches supplémentaires. À savoir d'abord d'abord l'extension de ces méthodes aux symétries construites sur le groupe affine, et aux représentations de signaux 1D ; ensuite une étude systématique des estimations à 2 dimensions des déformations stationnarisantes ; et enfin les liens entre l'étude locale des déformations et l'étude globale consistant à mettre en relation deux groupes de symétrie (l'un étant des translations) – une possibilité est de fonder sur ces principes des définitions de symétrie locales.

## Références

- [1] P.O. Amblard, P. Borgnat, and P. Flandrin. Stochastic processes with finite size scale invariance. In *SPIE's Symposium on Fluctuations and Noise*, June 2003.
- [2] G. Barenblatt. *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*. CUP, Cambridge, 1996.
- [3] A. Berthon. Représentations et changements d'horloge. In *Temps-fréquence, ondelettes et multirésolution*, pages 19.1–19.4. Journées thématiques du GDR TdSI et colloque, March 1994.

- [4] P. Borgnat. *Modèles et outils pour les invariances d'échelle brisée : variations sur la transformation de Lamperti et contributions aux modèles statistiques de vortex en turbulence*. PhD thesis, École normale supérieure de Lyon, November 2002.
- [5] K. Burnecki, M. Maejima, and A. Weron. The Lamperti transformation for self-similar processes. *Yokohama Math. J.*, 44 :25–42, 1997.
- [6] M. Clerc and S. Mallat. Shape from texture and shading with wavelets. In *Progress in Systems and Control Theory*, volume 25. Birkhauser Verlag, 1999.
- [7] M. Clerc and S. Mallat. Estimating deformations of stationary processes. Submitted to the *Annals of Statistics*, June 2000.
- [8] I. Donescu. *Modélisation de textures invariantes par transformation plane. Codage sur des supports de forme arbitraire*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1997.
- [9] P. Flandrin. *Time-Frequency / Time-Scale Analysis*. Academic Press, 1999.
- [10] P. Flandrin, P. Borgnat, and P.-O. Amblard. From stationarity to self-similarity, and back : Variations on the Lamperti transformation. In G. Raganjara and M. Ding, editors, *Processes with Long-Range Correlations : Theory and Applications*, volume 621 of *Lectures Notes in Physics*. Springer-Verlag, June 2003.
- [11] U. Frisch. *Turbulence*. CUP, Cambridge, 1995.
- [12] E. Hannan. Group representations and applied probability. In J. Gani, editor, *Supplementary Review series in applied probability*, volume 3. Methuen & Co., 1965.
- [13] F. Hlawatsch, G. Tauböck, and T. Twaroch. Covariant time-frequency analysis. In L. Debnath, editor, *Wavelets and Signal Processing*. Birkhäuser, Boston (MA), 2002.
- [14] J. Lamperti. Semi-stable stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104 :62–78, 1962.
- [15] B. Mandelbrot and J. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10(4) :422–437, 1968.
- [16] E. Masry. The wavelet transform of stochastic processes with stationary increments and its application to fractional Brownian motion. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, 39(1) :260–264, January 1993.
- [17] W. Meiring. *Estimation of heterogeneous space-time covariance*. PhD thesis, University of Washington, Seattle, 1995.
- [18] O. Perrin. *Modeling covariance of a non-stationary process by space deformation and statistics*. PhD thesis, University of Paris I, 1997.
- [19] O. Perrin and W. Meiring. Identifiability for non-stationary spatial structures. *J. of Appl. Prob.*, 36(4) :1244–1250, 1999.
- [20] O. Perrin and R. Senoussi. Reducing non-stationary stochastic processes to stationarity by a time deformation. *Statistics & Probability Letters*, 43 :393–397, 1999.
- [21] O. Perrin and R. Senoussi. Reducing non-stationary random fields to stationarity and isotropy using a space deformation. *Statistics & Probability Letters*, 48 :23–32, 2000.
- [22] A.R. Rao. *A taxonomy for texture description and identification*. Springer Verlag, 2000.
- [23] P. Sampson and P. Guttorp. Nonparametric estimation of nonstationary spatial covariance structure. *J. of Am. Stat. Association*, 87 :108–119, 1992.
- [24] M. Stein. Fast and exact simulation of fractional Brownian surfaces. at press in *J. Comput. Graphical Statist.*, 2002.
- [25] M. Vergassola and U. Frisch. Wavelet transforms of self-similar processes. *Physica D*, 54 :58–64, 1991.
- [26] W. Vervaat. Properties of general self-similar processes. *Bull. of International Statistical Inst.*, 52 :199–216, 1987.
- [27] A. Vidács and J. Virtamo. ML estimation of the parameters of fBm traffic with geometrical sampling. In *IFIP TC6, Int. Conf. on Broadband communications '99*. Hong-Kong, November 1999.
- [28] A.T.A. Wood and G. Chan. Simulation of stationary process in  $[0,1]^d$ . *J. of Computational and Graphical Stat.*, 3 :409–432, 1994.
- [29] A. Yaglom. *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*. Springer-Verlag, 1987.

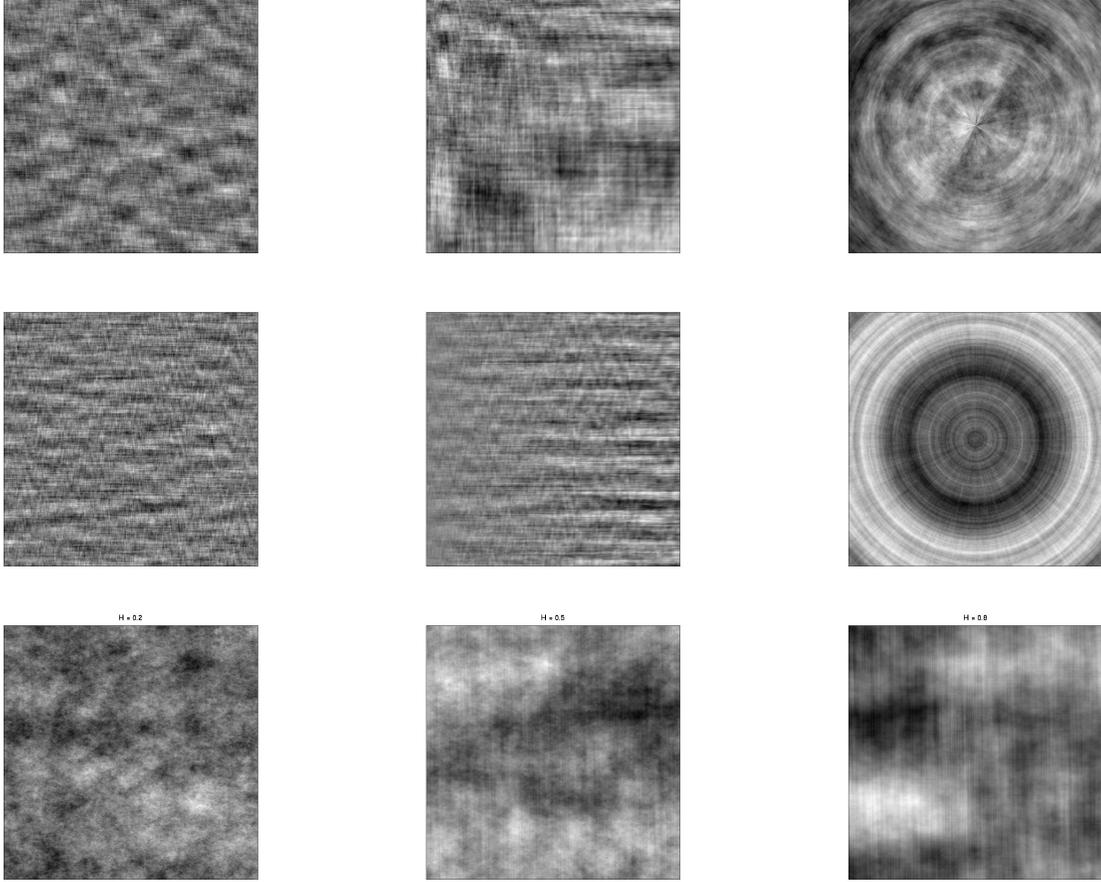


FIG. 1 – Exemples de synthèse de champs à invariance prescrite par une déformation, de 512 sur 512 pixels. Sur les 4 images du haut à gauche, l'origine est le point en haut à gauche ; pour les 5 autres, l'origine est au centre de l'image. De gauche à droite, puis bas en haut : champ stationnaire avec covariance en  $e^{-\alpha(|a_1|+|a_2|)} \cos a_1 \cos a_2$  ; transformé du précédent par la déformation  $\underline{\phi}_A$  ; champ invariant sous rotations et homothéties, avec corrélation du générateur stationnaire en  $e^{-\alpha|a|}$  et déformation utilisée  $\underline{\phi}_B$  ; champ stationnaire avec covariance en  $e^{-\alpha(|a_1|+|a_2|)} \cos a_1 \cos 4a_2$  ; transformé du précédent par la déformation  $(\ln a_1, a_2)$ , de sorte que l'image est invariante par translation selon l'axe vertical, et invariante par dilatation selon l'axe horizontal ; les trois images du bas sont des synthèses de draps browniens fractionnaires en créant des champs prescrits par (4) avant d'appliquer  $\underline{\phi}_B$ , avec  $H = 0.2, 0.5, 0.8$  ; noter qu'ici l'isotropie autour de l'origine se perçoit peu.

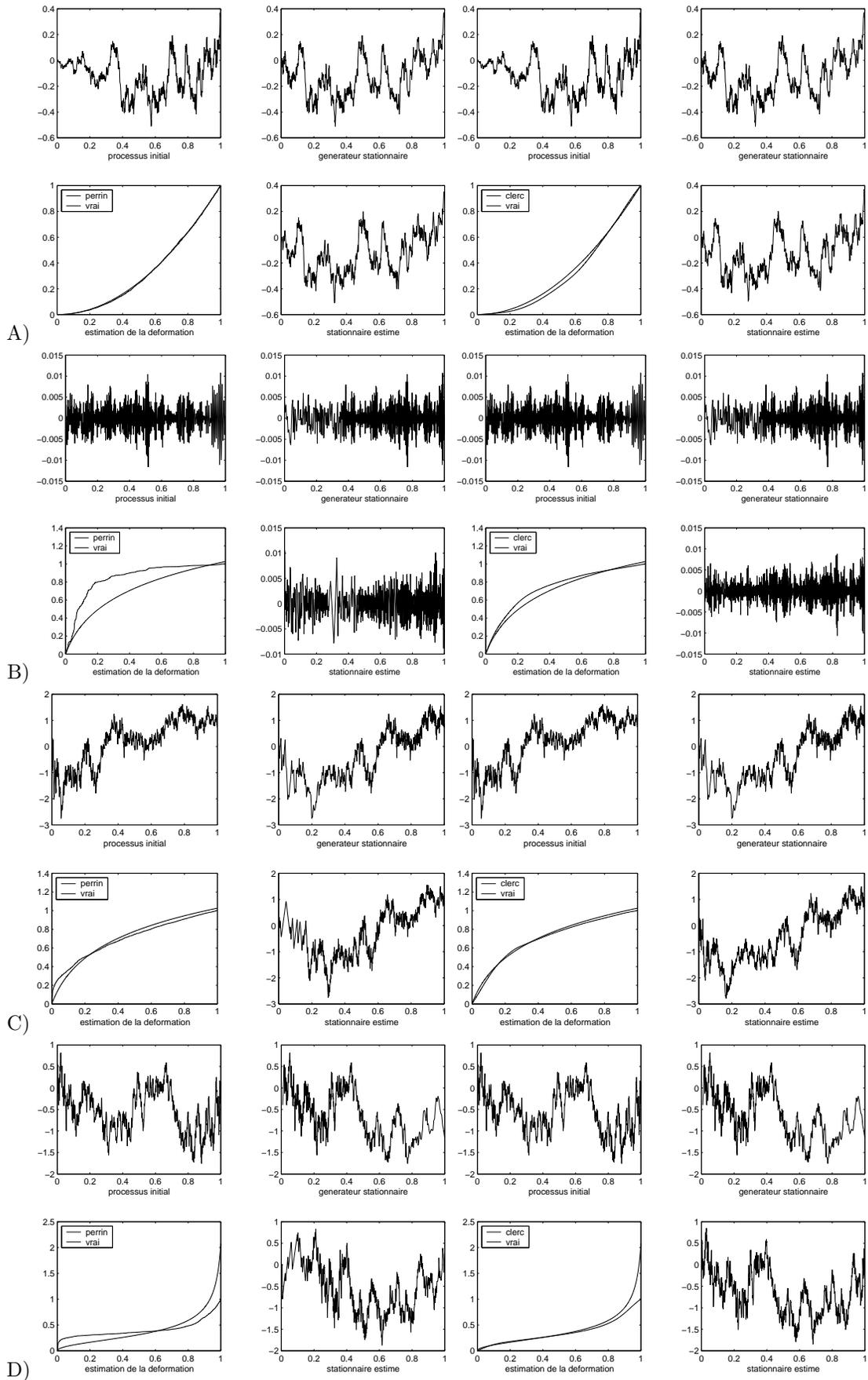


FIG. 2 – Estimation de déformations temporelles. On présente pour chaque exemple (A à D, voir texte) le résultat donné par l'estimateur (5) [processus originel en haut à gauche, processus stationarisé par  $\phi$  théorique en haut à droite, résultat de l'estimation comparé à la vraie déformation en bas à gauche, et processus numériquement stationarisé en bas à droite], puis à côté les mêmes résultats par l'estimateur (6).