

SIGNAUX DE TURBULENCE ET ANALYSE DE MELLIN

Pierre Borgnat

Laboratoire de Physique ÉNS Lyon 46 allée d'Italie 69364 Lyon Cedex 07
(email Pierre.Borgnat@ens-lyon.fr)

juin 2003

Résumé

La turbulence des fluides est depuis longtemps source d'inspiration et de problèmes pour le traitement de signaux complexes. La première partie sera une introduction à ce domaine, et discute les caractéristiques des signaux à analyser, d'abord dans un cadre de processus aléatoires puis la présence de structures organisées dans l'écoulement du fluide. On esquissera des théories et des expériences qui étudient ce problème. La deuxième partie présente un formalisme d'analyse de l'auto-similarité stochastique à l'aide de la transformation de Mellin. Cette analyse est issue de tentatives de concilier auto-similarité et structures dans un signal et nous montrerons ce qu'elle peut apprendre dans certains cas. Cependant l'application directe aux signaux de turbulence reste à développer.

1 Introduction à la turbulence et aux signaux qui en sont issus

1.1 Mécanique des fluides

L'étude des mouvements d'un fluide est un problème de mécanique, mais pour relier l'équation plus aisément aux mesures, on regarde la vitesse eulérienne $\vec{v}(\vec{r}; t)$ définie en des points statiques \vec{r} , puisqu'il suffit alors de mettre une sonde en un endroit fixe pour la mesurer. L'équation est celle de Navier-Stokes :

$$D_t \vec{v} = \underbrace{\partial_t \vec{v}}_{\text{dérivée locale}} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}}_{\text{dérivée convective}} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \underbrace{\nu \Delta \vec{v}}_{\text{terme de viscosité}}, \quad (1)$$

où ρ est la densité, p la pression et ν la viscosité. À cela s'ajoute l'équation de conservation de la masse, soit $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ pour un écoulement incompressible.

Le problème est complexe car l'équation comporte un terme non linéaire, celui de la dérivée convective. La comparaison des ordres de grandeur du terme convectif non-linéaire sur le terme visqueux est donnée par le nombre de Reynolds, $Re = UL/\nu$, construit avec une vitesse U et une longueur L caractéristiques. Plus Re est grand, moins l'écoulement apparaît organisé, et les mesures ont une apparence aléatoire. On appelle turbulence le comportement des écoulements de fluide à grand nombre de Reynolds. Noter que cela ne revient pas à supposer un écoulement de fluide parfait (sans terme visqueux) car l'énergie dissipée par la viscosité ne s'annule pas même si $Re \rightarrow \infty$; on utilisera la dissipation visqueuse moyenne $\bar{\epsilon} = 1/2 \langle d(\vec{v}^2)/dt \rangle$, qui n'est pas nulle.

1.2 Les mesures eulériennes en turbulence : lois en échelle et intermittence

Signaux temporels. Dès les observations préliminaires d'un écoulement turbulent, on est frappé par plusieurs choses : à la fois par les changements incessants de l'allure du fluide (mais avec toujours des courants visibles, des tourbillons, ...) et par une certaine répétition dans ces motifs qui présage l'existence de comportements génériques, moyens. L'idée d'analyser les mesures que l'on peut faire sur ces systèmes comme des signaux "aléatoires" du fait de cette difficulté à prévoir l'évolution et à déterminer avec précision les conditions initiales à un temps donné est ainsi communément acceptée [Bat53, BLF53]. On trouve en figure 1 un exemple de la vitesse $\vec{v}(\vec{r}_0; t)$ enregistrée en un point fixe au cours du temps. La mesure est faite dans un fluide qui est agité le plus possible, une bonne façon de le faire étant de propulser un jet à grande vitesse qui est instable dans le fluide et

devient rapidement turbulent. La vitesse en un point est obtenue à l'aide d'une sonde de vitesse à fil chaud. Ce signal a une allure de processus aléatoire et est étudié avec les outils de l'analyse stochastique.

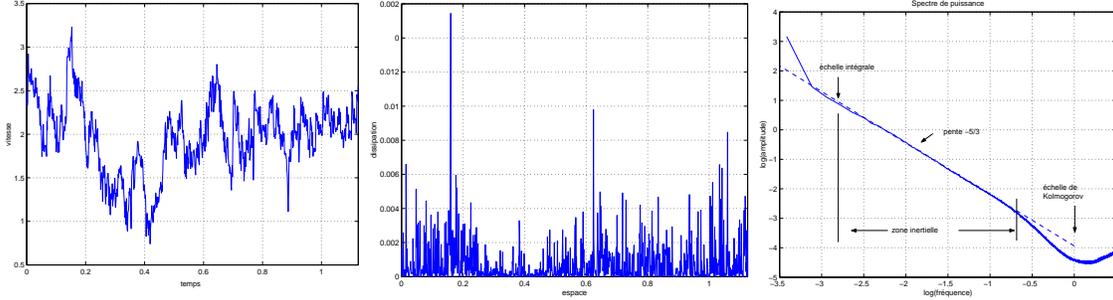


Fig 1 - Signal de vitesse eulérienne à gauche, signal de dissipation au milieu (carré de la dérivée de la vitesse), et la loi spectrale qui suit la prédiction en $k^{-5/3}$ de Kolmogorov dans la zone inertielle (distance entre L et η). Les signaux proviennent de l'expérience GReC de turbulence à haut Reynolds (jusqu'à 10^7) dans de l'hélium à 4,5 K. [PPB⁺03]

Études statistiques. Premier élément, ces signaux sont stationnaires et la loi de probabilité des vitesses est pour l'essentiel gaussienne. Cependant ces mesures ne rendent pas justice aux détails du signal. On se convainc facilement qu'il montre des variations sur une large gamme d'échelles de temps. Une analyse plus avancée est alors d'étudier en fonction du temps τ de séparation le comportement des accroissements de vitesse : $\delta\vec{v}(\tau; \vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}; t + \tau) - \vec{v}(\vec{x}; t) = \vec{v}(\vec{x} + \vec{r}; t) - \vec{v}(\vec{x}; t)$. La deuxième forme permet de passer à des variables d'espace en adoptant l'hypothèse de Taylor d'advection locale, soit $\vec{r} \simeq \tau\vec{v}(\vec{r}; t)$. On regardera les composantes longitudinales δv , parallèles aux vecteurs de séparation $\delta\vec{r}$.

Théorie de Kolmogorov – K41. Le lecteur pourra trouver ample littérature sur les théories statistiques principales de la turbulence, en particulier dans [Bat53, BLF53, MY71, Fri95]. On se contente ici de baliser les aspects généraux. Les théories se donnent pour objectif d'expliquer les propriétés des champs aléatoires $\delta\vec{v}(\vec{r}; \vec{x}, t)$. Les premières hypothèses adoptées sont la stationnarité en temps t , puis celles d'homogénéité (indépendance vis-à-vis de \vec{x}) et d'isotropie (qui, combinée avec l'incompressibilité, implique que la connaissance de δv longitudinale suffit). Kolmogorov a proposé en 1941 [Kol41a, Kol41b] d'ajouter à ces invariances précédentes l'auto-similarité du champ de vitesse :

$$\delta v(\lambda\vec{r}; \vec{x}, t) \stackrel{d}{=} \lambda^{-h} \delta v(\vec{r}; \vec{x}, t). \quad (2)$$

En supposant que le taux de dissipation reste non nul même si le nombre Re tend vers l'infini, alors dimensionnellement la viscosité ν et $\bar{\epsilon}$ sont les seules grandeurs qui restent. Un calcul dimensionnel de $\bar{\epsilon}$ à l'échelle r comme $\bar{\epsilon} \simeq [\delta v(r)]^2 / [r / \delta v(r)]$ impose que $h = 1/3$ est l'exposant d'auto-similarité et les fonctions de structure (nom des moments successifs des $\delta v(r)$) prennent la forme suivante en turbulence pleinement développée :

$$\mathbb{E} \{ (\delta v(r; \vec{x}, t))^p \} = C_p (\bar{\epsilon} r)^{p/3} \quad \text{si } \eta \preceq r \preceq L \quad (\text{zone inertielle}) \quad (3)$$

Pour $p = 2$ on en déduit la corrélation puis (par la relation de Wiener-Khinchine) au spectre en énergie qui est alors une loi de puissance dans la zone inertielle : $E(k) \sim \nu^{5/4} \bar{\epsilon}^{1/4} (k\eta)^{-5/3}$. On a introduit ici l'unique longueur selon K41, celle de la dissipation visqueuse $\eta = (\nu^3 / \bar{\epsilon})^{1/4}$.

Exposants des lois de puissance. Formalisme multifractal et cascades aléatoires. En fait la prédiction (3) de K41, célèbre pour la loi spectrale en $k^{-5/3}$ expérimentalement vérifiée, est fautive pour les autres ordres $p \neq 2$ et on a reporté en figure 2 (haut à gauche) les exposants mesurés pour les zones où $\mathbb{E} \{ (\delta v(r; \vec{x}, t))^p \} \sim r^{\zeta_p}$. Une nette déviation des ζ_p par rapport à $p/3$ est constatée.

Une première cause de la déviation est l'**intermittence temporelle** de la vitesse et la dissipation : des bouffées d'activité et de variation brusques de ces grandeurs existent et conduisent à une régularité des signaux qui varie d'un point à l'autre, comme cela est visible sur l'exemple de dissipation (figure 1). Une interprétation est que l'auto-similarité décrite en (2) s'écrit avec des exposants h qui fluctuent et elle conduit au formalisme multifractal [FP85, Fri95] qui prédit une courbure de la loi ζ_p . Brièvement, un signal est multifractal si les points où la régularité locale (exposant de Hölder, c'est-à-dire un comportement proche de (2) pour r tendant vers 0) forment un ensemble fractal, de dimension non triviale $D(h)$. Nous renvoyons à [Fri95, Jaf97] pour des discussions sur les aspects physiques et mathématiques du formalisme.

Une deuxième analyse met l'accent sur l'effet **statistique** de l'**intermittence** [Cas97]. Si (3) tenait, on devrait avoir pour la variable aléatoire $\delta v(r)/(\bar{\epsilon}r)^{1/3}$ une loi indépendante de r . Ce n'est pas le cas, même dans la zone inertielle. Les histogrammes de ces variables aléatoires $\delta v(r)$ ont été tracés à partir de mesures. La figure 2 (milieu) prouve que le résultat est faux puisque les lois évoluent avec r , passant d'une distribution gaussienne quand r est grand (proche de la grande échelle L), à une loi ayant des ailes exponentielles quand r se rapproche de η . Ces queues représentent l'existence d'événements intenses (grande variation de vitesse) à petite distance.

On peut modéliser cette évolution sous la forme d'un processus aléatoire multifractal. Castaing propose [Cas97] de modéliser cette propriété des signaux de vitesse comme celle de cascades aléatoires infiniment divisibles. La propriété centrale est que l'on sait relier les lois de probabilité $P_r(\ln |\delta v|)$ d'une échelle r à l'autre par $P_{r_2}(\ln |\delta v|) = G^{*n(r_2)-n(r_1)} \star P_{r_1}(\ln |\delta v|)$, où \star est la loi de convolution. G est le noyau de la cascade, la façon de déformer les lois pour changer d'échelle et $G_{r_1,r_2} = G^{*n(r_2)-n(r_1)}$ le propagateur qui fait passer d'un échelle r_1 à r_2 . De ceci on prédit le comportement des fonctions de structure en $\mathbb{E}\{(\delta v(r; \vec{x}, t))^p\} \sim e^{H(p)n(r)}$ avec $H(p) = -\ln \tilde{G}(p)$, (où \tilde{G} est la transformée de Laplace de G), soit des lois de puissances avec des exposants $\zeta_p = H(p)$ si $n(r) = \ln r$ au moins dans la zone inertielle. On trouvera dans [Cha01] une mise en perspective de la physique de la turbulence et des travaux théoriques sur ces cascades aléatoires.

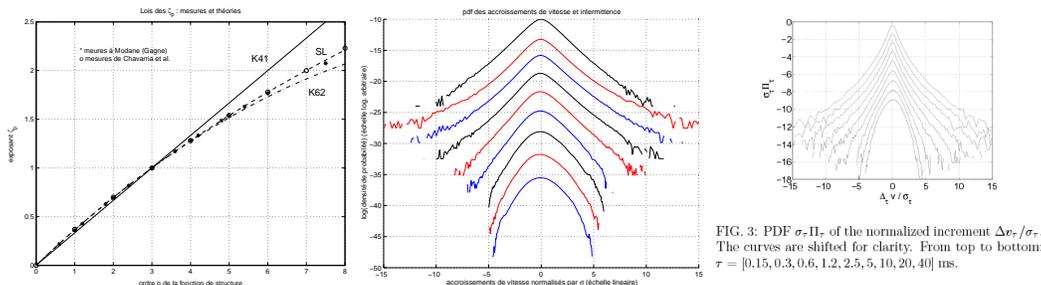


Fig 2 - Mise en évidence de l'intermittence. À gauche, courbe des ζ_p , exposants des fonctions de structure mesurées (expériences de Gagne [Gag87] et de Chavaria [CBC95]), comparés à différentes théories (K41, Kolmogorov 62 et modèle de She-Lévêque); au milieu, lois de distribution des accroissements de vitesse eulérienne de l'expérience GReC. À droite lois de distribution des accroissements de vitesse lagrangienne des mesures de Pinton et Mordant [MMMP01], qui révèlent une intermittence statistique encore plus forte.

1.3 Tourbillons et structures dans les fluides. Autres mesures en turbulence

Quelle influence des structures en turbulence ? Ces modèles statistiques rendent compte de l'intermittence et de la complexité des signaux de turbulence en exhibant les lois statistiques mais oublient en fait une des premières constatations portant sur l'organisation, toujours changeante certes, mais structurée d'un flot turbulent. Une idée alternative serait donc de partir de ces structures, en premier lieu les tourbillons (ou vortex) intenses que l'on sait apparaître dans un fluide turbulent [DCB91].

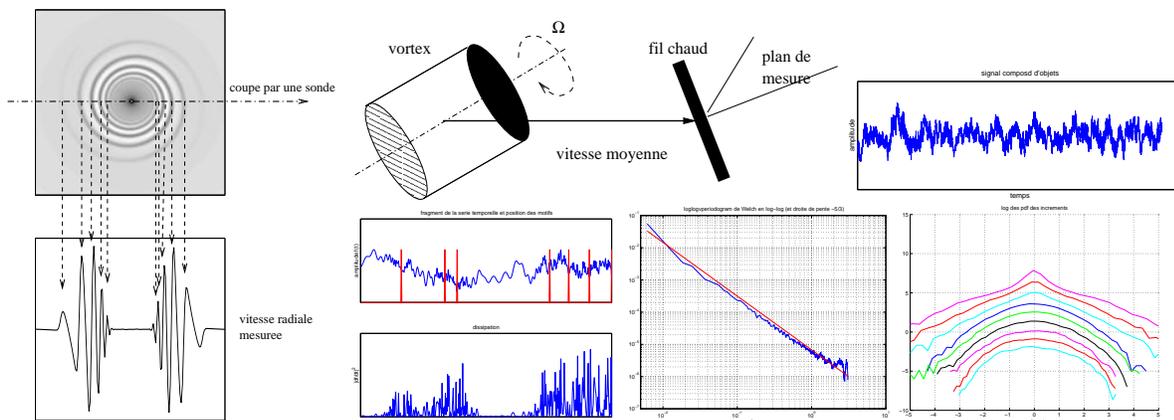


Fig 3 - Modèle de signal construit sur des vortex ; à gauche illustration de l'obtention de signaux structurés en singularités oscillantes en coupant des vortex. À droite on a montré un signal formé par la succession de motifs de ce type, avec un zoom sur des détails au milieu, l'équivalent de la dissipation qui révèle une intermittence temporelle, et les deux derniers graphes montrent les lois de puissance (ici en $k^{-5/3}$) pour l'énergie et l'intermittence statistique. [Bor02]

En terme d'analyse du signal les caractéristiques statistiques mesurées pourraient aussi trouver origine dans l'existence d'objets à structure interne complexe dans le fluide [Mof84, HV91]. Alors que les modèles statistiques décrivent des singularités partout dans le signal, sans conduire à l'existence de structures, on pourrait au contraire n'avoir que des objets structurés isolées comme des singularités oscillantes [Mof93, JKVF93]. En effet, si on regarde un tourbillon isolé, on attend que l'objet passant sur une sonde de vitesse induise une signature qui est simulée sur la figure 3. Nous avons ici calculé une forme admissible, solution de l'équation (1), pour un tourbillon. La solution examinée est celle de Lundgren [Lun82] que nous ne commenterons guère plus que pour dire qu'elle décrit une classe de tourbillons allongés, filiformes, qui s'enroulent sur leur cœur en développant des ailes spiralées qui lui donne cette structure interne riche. Un mélange, même simple, d'objets ayant une structure interne riche, peut conduire à des statistiques compliquées, fonctions de structure multifractale ou intermittence des statistiques.

Mesures lagrangiennes en turbulence. Récemment des expériences ont permis de suivre une ou plusieurs particules au cours du temps dans un fluide et d'enregistrer les vitesses lagrangiennes [LVC⁺01, Mor01, MMMP01]. Nous commenterons la seconde qui utilise des techniques de sonar Doppler. Il est intéressant ici de souligner qu'ici la méthode d'analyse est forcément instationnaire puisqu'il faut suivre une vitesse instantanée qui fluctue énormément et non seulement trouver les moyennes. Dans l'expérience de Pinton et Mordant [MMMP01], la particule est illuminée par une onde ultra-sonore plane et diffuse celle-ci. La mesure du décalage Doppler donne la vitesse. En figure 4 au milieu nous montrons le signal acquis après hétérodynage sur le graphe du haut (ainsi la vitesse est proportionnelle à la fréquence), puis sa représentation temps-fréquence au milieu. Le graphe du bas est le résultat de l'estimation par filtrage (non stationnaire) de Kalman de cette fréquence.

Alors que l'analyse statistique de la vitesse lagrangienne révèle essentiellement les mêmes propriétés (fonctions de structure en loi de puissance, intermittence des lois que l'on trouvera en figure 2), l'examen des trajectoires de la figure 4 suivies montre des signaux d'allure différente de ceux en eulérien. En particulier on trouve souvent des événements d'oscillation rapide de la vitesse que l'on associerait volontiers au passage dans un tourbillon et au tournoiement de la particule dans celui-ci.

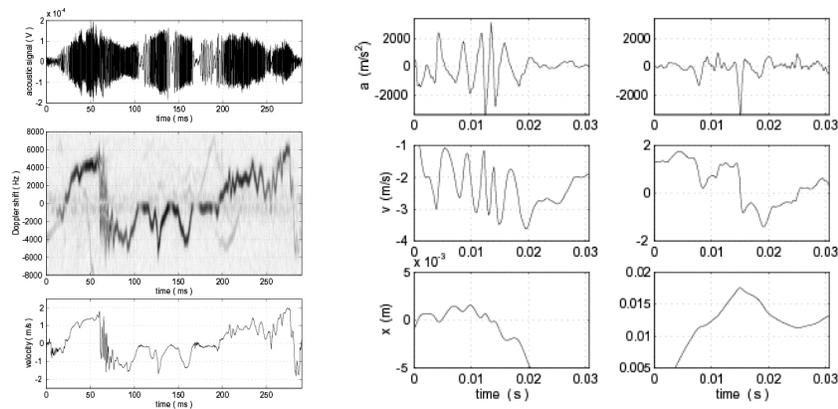


Fig 4 - Mesure de vitesse lagrangienne : à gauche le signal acquis et sa décomposition temps-fréquence, à droite des trajectoires reconstruites, respectivement en accélération, en vitesse et en position pour les deux composantes accessibles à la mesure. [MMMP01]

Mesures de vorticité en turbulence. Si les zones de tourbillons ont une importance pour comprendre les propriétés d'un fluide turbulent, il est légitime de chercher à directement mesurer la vorticité qui est le rotationnel de la vitesse $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$. La méthode naïve qui serait de cartographier la vitesse et d'en déduire la vorticité ne donne actuellement pas de résultat précis du fait de l'échantillonnage trop lâche des méthodes de mesure de champs de vitesse eulériens.

En s'appuyant sur les propriétés d'interaction entre un écoulement et du son, C. Baudet a développé une expérience qui sonde directement la vorticité d'un écoulement [BMW99]. Une onde sonore diffuse sous le fait d'un champ de vorticité et donne accès à une composante de Fourier de celui-ci. Comme on mesure ensuite l'onde diffusée par un volume de l'écoulement, l'expérience est une mesure spectrale, en volume, mais instantanée de la vorticité. La figure 5 montre des signaux typiques enregistrés à gauche, sur deux canaux indépendants qui sondent la même composante de Fourier. La communauté d'allure prouve que le comportement instantané a bien une origine physique. La figure de droite est la représentation temps-fréquence d'un tel signal.

À nouveau l’intermittence, ici de la vorticité, se signale par le passage de paquets qui, du fait de la méthode de mesure utilisée, dénotent une structuration à l’échelle – le vecteur de Fourier en fait, sondée par diffusion acoustique. Ces paquets ont une signature à étudier par une lecture non stationnaire des signaux.

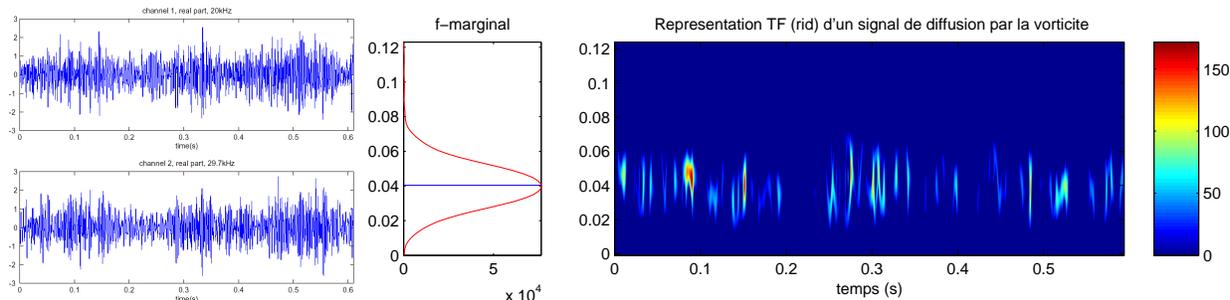


Fig 5 - Mesures de vorticité par diffusion d’une onde sonore de Baudet et Michel. À gauche on montre le signal de diffusion acoustique acquis sur deux canaux accordés pour sonder la même composante de Fourier de la vorticité. À côté on voit la décomposition temps-fréquence d’un tel signal, qui révèle le passage de paquets organisés sur lesquels on peut faire des statistiques. [BMW99]

1.4 Du côté du traitement du signal : quelles méthodes pour la turbulence ?

Des représentations non stationnaires. Puisque les signaux de turbulence (nous avons illustré les vitesses eulérienne et lagrangienne et la vorticité) ont des variations complexes qui véhiculent l’information sur la turbulence, les méthodes non stationnaires y trouvent un champ d’application naturel. Partant d’un signal $X(t)$, on sait que sa représentation en fréquence, par transformée de Fourier, est parfois plus intéressante : $(\mathcal{F}X)(\nu) = \int x(u)e^{-i2\pi u\nu} du$, bien qu’elle porte la même information.

Quand les descriptions uniquement temporelle ou spectrale se révèle insuffisante, il faut s’aider des représentations qui dépendent d’un temps et d’une fréquence (parfois d’une échelle) à la fois [Fla93], afin de mieux déployer l’information. De telles représentations furent utilisées pour les figures 4 et 5. Deux classes de solution sont possibles : celles qui décomposent le signal sur des bases précisées en temps et en fréquence, décompositions atomiques linéaires puisque l’objectif est d’avoir $X(t) = \iint r_x(u, \nu)b_{uf}(t) du d\nu$. La variable ν de la représentation $r_x(u, \nu)$ s’interprète en fréquence si elle se décale quand X est translatée en fréquence (possible si par exemple $b_{uf}(t) = b_0(t - u)e^{-i2\pi ft}$). L’autre solution est celle des représentations bilinéaires, construites par lissage (en temps et fréquence) de la représentation de Wigner $W_X(t, f) = \int X(t+\tau/2)\overline{X}(t-\tau/2)e^{-i2\pi f\tau} d\tau$. Ces distributions quadratiques peuvent conduire à une meilleure lisibilité d’un signal que les décompositions atomiques, en particulier une localisation meilleure de trajectoires dans le plan temps-fréquence.

Des représentations en échelle. Il n’est pas nécessaire de conserver l’interprétation fréquentielle de la deuxième variable. L’analyse en terme d’auto-similarité de la vitesse turbulente, puis l’étude de sa régularité locale, privilégie la notion d’échelle. On construit les motifs de base par dilatation et translation dans le temps : $T_X(t, a) = \int X(u)\psi([u - t]/a) du/a$. On reconnaît la forme des transformées en ondelettes [Mey90] si ψ , l’ondelette, vérifie la condition d’admissibilité. D’autres cours se chargent de la présentation des bases de l’analyse harmonique avec les ondelettes. Disons ici que ces ondelettes forment de bien meilleures bases que les $b_{uf}(t)$ et sont alors des outils privilégiés d’analyse de l’auto-similarité car elles sont invariantes en échelle dans ce cas et permettent de mesurer l’exposant h , ou les exposants dans un contexte multifractal [Abr97, AGH88].

Analyse de statistiques ou de structures ? Passer par ces représentations non stationnaires autorise en fait de concilier statistiques et structures puisque la variable de fréquence ou d’échelle à un instant décrit en quelque sorte la structure, au moins certains aspects (la régularité locale par exemple), tandis que le déploiement en temps permet d’effectuer des moyennes statistiques sur t des grandeurs analysées.

La deuxième partie s’intéresse à une voie orthogonale d’étude de signaux complexes, qui s’appuie sur des objets de bases structurés car ce sont des singularités oscillantes. L’idée qui va être exposée est de construire une analyse spectrale stochastique directement pour les propriétés liées aux dilatations, donc aux échelles. La motivation principale est l’étude d’un signal à partir de ses propriétés en échelle mais l’idée connexe que nous commenterons en conclusion est que les modèles de vortex de la turbulence s’appuient sur des objets (comme en figure 3) qui ont chacun un comportement intéressant en échelle, donc soumis a priori à ce type d’étude.

2 Processus aléatoires et dilatations : Mellin et Lamperti

2.1 Dilatation, échelle et représentation de Mellin

On définit les dilatations $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ qui associent à une fonction (éventuellement aléatoire) $X(t)$, $t \in \mathbb{R}_*^+$, son dilaté $(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t) = \lambda^{-H}X(\lambda t)$. H sert d'exposant de normalisation et de cette manière le groupe des dilatations $\{\mathcal{D}_{H,\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}_*^+\}$ est un groupe continu d'opérateurs unitaires de l'espace $L^2(\mathbb{R}_*^+, t^{-2H-1}dt)$.

Les dilatations permettent de définir une échelle qui n'est pas directement celle des ondelettes. On introduit le générateur hermitien \mathcal{C} du groupe des dilatations tel que $\mathcal{D}_{H,\lambda} = e^{i2\pi\lambda\mathcal{C}}$ et le calcul donne : $i2\pi(\mathcal{C}X)(t) = (-H + t d/dt)X(t)$. L'idée principale pour interpréter la grandeur que mesure l'opérateur \mathcal{C} est que ses fonctions propres sont insensibles, à une phase près, aux dilatations qui modifient les échelles. Les fonctions propres vivent en quelque sorte à une échelle et la valeur propre associée est une qualité de l'échelle de cette fonction.

Les fonctions propres $E_{H,\beta}(t)$ de \mathcal{C} se calculent facilement puisque on doit avoir $dE_{H,\beta}(t)/E_{H,\beta}(t) = (H + i2\pi\beta)dt/t$, soit finalement $E_{H,\beta}(t) = t^{H+i2\pi\beta}$ à une constante multiplicative près. On reconnaît ici la base des fonctions de Mellin et ainsi la décomposition de Mellin (inversible) est une manière de décomposer un signal en échelle de Mellin β .

$$(\mathcal{M}_H X)(\beta) = \int_0^{+\infty} t^{-H-i2\pi\beta} X(t) \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{H,\beta}(t) (\mathcal{M}_H X)(\beta) d\beta. \quad (4)$$

La décomposition de Mellin a été de nombreuses fois (ré)-introduite pour des applications précises en traitement du signal [Coh93, BBO96, Fla98, Nic02]. Nous laissons à d'autres cours le soin de préciser les aspects mathématiques de la transformation et le lecteur pourra se reporter à [Dav84, Zem87] pour conforter ses connaissances de ce sujet. Nous allons montrer dans la suite comment cette analyse permet de fonder des outils de traitement du signal stochastique, en l'interprétant comme la décomposition naturelle pour les processus auto-similaires.

2.2 Interprétation par la transformation de Lamperti

Rappelons qu'un processus $\{X(t), t \in \mathbb{R}_*^+\}$, est dit auto-similaire d'exposant H (ou H -ss) [Ver87] si il est invariant par dilatation, soit $\{(\mathcal{D}_{H,\lambda}X)(t), t \in \mathbb{R}_*^+\} \stackrel{d}{=} \{X(t), t \in \mathbb{R}_*^+\}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ (égalité $\stackrel{d}{=}$ pour toutes ses lois de probabilités multi-dimensionnelles). Dès l'introduction de cette classe de processus, J. Lamperti a remarqué que la simple transformation inversible \mathcal{L}_H , dite maintenant de Lamperti [Lam62] :

$$(\mathcal{L}_H Y)(t) = t^H Y(\ln t), \quad t > 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{L}_H^{-1} X)(t) = e^{-Ht} X(e^t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (5)$$

transforme un processus stationnaire Y en un processus X auto-similaire d'exposant H et inversement. Rappelons qu'un processus $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ est stationnaire si et seulement si il est invariant par toutes les translations temporelles, donc $(\mathcal{S}_\tau Y)(t) \stackrel{d}{=} Y(t + \tau) \stackrel{d}{=} Y(t)$ pour tout τ . La point central de la propriété de la transformation de Lamperti est qu'elle réalise une équivalence unitaire entre les translations \mathcal{S}_τ et les dilatations $\mathcal{D}_{H,\lambda}$ car :

$$\mathcal{L}_H^{-1} \mathcal{D}_{H,\lambda} \mathcal{L}_H = \mathcal{S}_{\ln \lambda} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_H \mathcal{S}_\tau \mathcal{L}_H^{-1} = \mathcal{D}_{H,e^\tau}. \quad (6)$$

Cette équivalence a des conséquences pratiques immédiates. Au lieu de directement rechercher une méthode d'analyse d'une propriété d'un processus auto-similaire, il peut être préférable de travailler sur son générateur stationnaire, transformée de Lamperti inverse du processus, afin d'employer les méthodes d'analyse et de représentation stationnaires bien connus en traitement du signal [FBA02]. Puisque l'outil privilégié pour les processus stationnaires est la transformation de Fourier, quel est son correspondant pour les processus H -ss ? En passant par la transformation de Mellin on a :

$$(\mathcal{F} \mathcal{L}_H^{-1} X)(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{L}_H^{-1} X)(u) e^{-i2\pi\beta u} du = \int_0^{+\infty} t^{-H} X(t) t^{-i2\pi\beta-1} dt = (\mathcal{M}_H X)(\beta) \quad (7)$$

La décomposition de Mellin est donc la représentation naturelle des processus autosimilaires, et peut se calculer comme $\mathcal{M}_H = \mathcal{F} \mathcal{L}_H^{-1}$. Plus généralement, puisque la correspondance revient à mettre en relation dilatations et translations selon (6), elle sert aussi à mettre en relation des invariances brisées en échelle et des situations non stationnaires en temps. Par exemple les méthodes temps-fréquence évoquées conduisent à des outils

temps-échelle (de Mellin) à travers l'utilisation de \mathcal{L}_H . Le schéma général est de décomposer une opération $\tilde{\mathbf{T}}$ que l'on cherche à faire sur X en passant par l'opération équivalent sur $(\mathcal{L}_H^{-1}X)$, écrivant alors $\mathbf{T} = \mathcal{L}_H \tilde{\mathbf{T}} \mathcal{L}_H^{-1}$.

$$\begin{array}{ccc} X(t) & \xrightarrow{?} & (\mathbf{T}X)(t) \\ \text{Transf. Lamperti inverse} \quad \downarrow & & \uparrow \quad \text{Transf. Lamperti} \\ (\mathcal{L}_H^{-1}X)(t) & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{T}}\mathcal{L}_H^{-1}X)(t) \end{array}$$

2.3 Analyse spectrale de processus auto-similaires

Nous proposons ici quelques exemples de propriétés que l'on sait déduire à l'aide de \mathcal{L}_H . On se reportera à [Bor02, BFA02, FBA02] pour plus de détails.

• **Covariance et spectres.** La covariance d'un processus $X(t)$ H -ss est nécessairement de la forme $R_X(t, s) \doteq \mathbb{E}\{X(t)X(s)\} = (ts)^H \gamma_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(\ln t/s) = (ts)^H c_X(t/s)$, où $\gamma_{\mathcal{L}_H^{-1}X}(\cdot)$ est définie positive. Cette fonction est celle de corrélation du générateur stationnaire $Y = (\mathcal{L}_H^{-1}X)$.

Il est immédiat d'introduire la densité spectrale de Mellin du processus $X(t)$ puisque

$$\Gamma_Y(\beta) = \int \gamma_Y(\tau) e^{-i2\pi\beta\tau} d\tau = \int c_X(k) k^{-i2\pi\beta-1} dk = (\mathcal{M}_{H=0}c_X)(\beta) \doteq \Xi_X(\beta). \quad (8)$$

À titre d'exemple, les mouvements browniens fractionnaires B_H , processus gaussiens, H -ss et à accroissements stationnaires [MV68] ont pour covariance $R_{B_H} = \sigma^2(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})/2$ et ainsi une corrélation $c_{B_H}(k) = \sigma^2[k^H + k^{-H} - |\sqrt{k} - 1/\sqrt{k}|^{2H}]/2$. Le calcul de la transformée de Mellin donne la densité spectrale associée : $\Xi_{B_H}(\beta) = \frac{\sigma^2}{H^2 + 4\pi^2\nu^2} \left| \frac{\Gamma(1/2 + i2\pi\nu)}{\Gamma(H + i2\pi\nu)} \right|^2$. Par la suite, on peut user de méthodes classiques pour donner des expressions pour la prédiction, l'interpolation ou le blanchiment de ce processus [NP99, NP00]. Remarquons au passage que le modèle de Barnes-Allan [BA66], proche de B_H , a justement une densité spectrale de Mellin identique à celle de B_H .

Les processus auto-similaires admettent aussi directement une décomposition sur la base de Mellin, une écriture harmonisable de la forme $X(t) = \int t^{H+i2\pi\beta} d\mathbf{X}(\beta)$, avec des incréments spectraux décorrélés de telle sorte que $\mathbb{E}\{d\mathbf{X}(\beta_1)\overline{d\mathbf{X}(\beta_2)}\} = \delta(\beta_1 - \beta_2) \Xi_X(\beta_1) d\beta_1 d\beta_2$. Notons enfin que cette écriture est parfois possible pour des processus qui ne sont pas H -ss mais n'ont qu'une auto-similarité incomplète (harmonisabilité de Loève pour les décompositions de Mellin).

• **Systèmes invariants d'échelle.** De la même manière qu'on introduit les filtres, opérateurs linéaires stationnaires (puis les modèles paramétriques ARMA), on peut s'intéresser aux opérateurs linéaires \mathcal{G} covariants en échelle, tels que $\mathcal{G}\mathcal{D}_{H,\lambda} = \mathcal{D}_{H,\lambda}\mathcal{G}$, pour tout λ . Ces opérateurs sont les transformés de Lamperti de filtres et ils agissent par l'intermédiaire d'une convolution multiplicative :

$$(\mathcal{G}X)(t) = \int_0^\infty g(t/s)X(s) \frac{ds}{s} = \int_0^\infty g(s)X(t/s) \frac{ds}{s}. \quad (9)$$

Nous ne détaillerons pas toutes les propriétés de ces systèmes. Leur intérêt est qu'ils conservent l'auto-similarité lors de leur action, en modifiant le processus par une formule des interférences. Si $A = \mathcal{G}X$ et $X(t)$, $t > 0$, est H -ss, on a $c_A(k) = \int c_X(u) \rho_g(k/u) du/u$, avec la corrélation de Mellin $\rho_g(\lambda) = \int g(\lambda s) \overline{g(s)} s^{-2H-1} ds$. Pour les spectres de Mellin, l'opérateur agit par une simple multiplication, $\Xi_A(\beta) = |(\mathcal{M}_H g)(\beta)|^2 \Xi_X(\beta)$.

La deuxième propriété remarquable est que tout processus H -ss s'écrit, par le théorème de Bochner, comme sortie d'un système covariant d'échelle :

$$X(t) = \int_0^{+\infty} g(t/s)V(s) \frac{ds}{s}, \text{ avec } \mathbb{E}\{V(t)\overline{V(s)}\} = \sigma^2 t^{2H+1} \delta(t-s). \quad (10)$$

Le bruit $V(t)$ est ici gaussien, markovien mais instationnaire, et il n'est autre que le transformé de Lamperti du processus de Wiener. La fonction du filtre donne les caractéristiques du processus puisque $c_X(k) = \sigma^2 k^{-H} \int g(k\theta) \overline{g(\theta)} \theta^{-2H-1} d\theta$, tandis que la densité spectrale est simplement $\Xi_X(\beta) = \sigma^2 |(\mathcal{M}_H g)(\beta)|^2$. Cette représentation est utile à certains calculs sur X , ou pour le modéliser par un système paramétrique si on suppose que $(\mathcal{M}_H g)(\beta)$ est une fraction rationnelle. La transformée de Mellin inverse permet d'écrire $X(t)$ comme solution d'un modèle paramétrique d'Euler-Cauchy : $\sum_{n=0}^p \alpha_n t^n X^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^q \beta_n t^n V^{(n)}(t)$, attaqué par le bruit

non stationnaire $V(t)$. Notons que l'élément différentiel de base est td/dt ici. Les solutions de ces systèmes sont, à l'inverse, toutes auto-similaires et donc les modèles d'Euler-Cauchy sont de outils intéressant de modélisation auto-similaire [NG99, YK97].

2.4 Analyse conjointe en Mellin et Fourier

Montrons sur un exemple ce que peut nous apprendre cette analyse en Mellin de processus auto-similaires par rapport aux études usuelles en Fourier. La fonction de Weierstrass-Mandelbrot [BL80], définie par $W(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{-nH} (1 - e^{i\lambda^n t}) e^{i\phi_n}$ est un modèle intéressant. Elle n'est pas directement H -ss car elle admet un facteur d'échelle privilégié λ , n'ayant alors qu'une propriété d'invariance d'échelle discrète (ou DSI). Dans la version aléatoire de la fonction, quand les ϕ_n sont des variables aléatoires i.i.d., elle vérifie $W(\lambda^k t) \stackrel{d}{=} \lambda^{-kH} W(t)$, propriété d'invariance d'échelle discrète statistique [BFA02]. Cette fonction a d'intéressant qu'elle conduit à un modèle approché de mouvement brownien fractionnaire $B_H(t)$.

Donnée sous cette forme, la fonction de Weierstrass est mise dans une écriture stationnaire : c'est une superposition de modes de Fourier, géométriquement répartis sur les λ^{-n} . Cette écriture est possible car W est à accroissements stationnaires. Nous avons vu que l'analyse naturelle à adopter pour les processus auto-similaires (même en un sens affaibli comme la DSI) est celle de Mellin. Il est légitime de chercher la décomposition de $W(t)$ sur les briques de base de cette approche : les fonctions de Mellin $E_{H,\beta}(t)$.

En utilisant \mathcal{L}_H on sait mener le calcul et on montre que dans le cas déterministe ($\phi_n = \mu n$) $W(t)$ a la forme suivante [BL80, FB03] : $W(t) = \sum_m \frac{-\Gamma(-H-m/\ln \lambda)}{\ln \lambda} e^{[-i\pi(H+m/\ln \lambda)/2]} E_{H,m/\ln \lambda}(t)$. Comme les $E_{H,\beta}(t)$ sont des chirps, des fonctions dont la fréquence instantanée évolue au cours du temps en β/t , cette décomposition de W est bien différente de la première écriture : elle est instationnaire et met l'accent sur les propriétés en échelle de Mellin de $W(t)$.

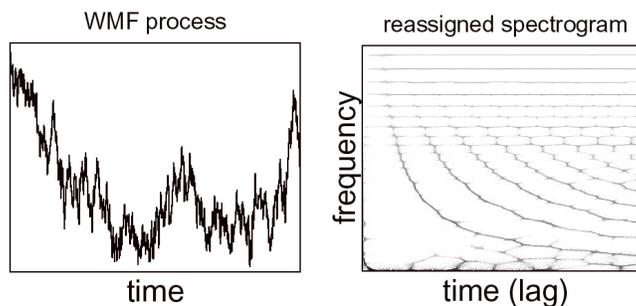


Fig 6 - Fonction de Weierstrass-Mandelbrot aléatoire ($H = 0.3$, $\lambda = 1.07$) à gauche et analyse temps-fréquence du variogramme empirique à droite (spectrogramme réalloué). Voir le texte pour l'interprétation. [FB03]

Nous montrons en figure 6 une réalisation de $W(t)$ avec des phases aléatoires et l'analyse temps-fréquence par un spectrogramme réalloué de son variogramme empirique : il révèle directement la double structure du signal [FB03]. Aux hautes fréquences, la fenêtre d'analyse devient assez large pour moyenner les contributions de plusieurs chirps et laisser apparaître les fréquences stationnaires espacées géométriquement. Aux basses fréquences la fenêtre devient relativement plus courte et permet de suivre l'évolution instantanée, non stationnaire, des modes fréquentiels et révèle alors préférentiellement la décomposition en chirps du signal. Les deux lectures sont valables, mais selon la méthode d'analyse l'une ou l'autre sera un modèle mieux adapté.

3 Notes de conclusion : turbulence et Mellin.

Nous avons montré ici qu'en turbulence on doit décrire à la fois un signal qui n'est pas simplement auto-similaire, dont les propriétés sont souvent révélées par des études instationnaires, et dans lesquels on peut trouver des structures organisées. Ensuite nous avons montré en quoi l'analyse de Mellin est naturelle pour décrire l'auto-similarité, ou plutôt en fait les propriétés construites sur la comparaison d'un signal et de ses version dilatées, qu'elle conduit a des outils qui ne sont pas stationnaires mais fondés sur des chirps, et que ceux-ci ont une structure bien organisée. En ajoutant à cela que la structure des fonctions de Mellin n'est pas éloignée des mesures attendues pour des vortex, l'association de l'analyse de Mellin au problème de turbulence est une idée qui mérite considération.

La difficulté est qu'actuellement on ne dispose pas de méthode d'estimation fiable qui puisse déterminer les propriétés en échelle de Mellin d'un signal globalement stationnaire, donc pour lequel on ne dispose pas de temps $t = 0$ nécessaire aux méthodes d'analyse de Mellin. Arrivant en fin de la place disponible ici, nous n'illustrerons pas directement les difficultés mais elle viennent principalement de ce que le mélange statistique d'objets structurés comme des fonctions de Mellin n'est pas inversible et que les signaux obtenus, comme ceux qu'on trouvait en figure 3, deviennent difficiles à discriminer des signaux aléatoires sans structure sous-jacente. De plus les outils temps-échelle de Mellin que l'on sait construire, par exemple par l'usage de \mathcal{L}_H , ne permettent pas actuellement des estimations fiables par manque de possibilité de faire des moyennes.

Concluons ce texte en rappelant que la turbulence est un problème encore ouvert à bien d'égard, même du point de vue de la simple description des signaux mesurés. Elle est ainsi source de problèmes et d'idées applicables à d'autres situations, et même si, comme ici pour l'analyse de Mellin des processus auto-similaires, on ne sait pas toujours comment revenir l'appliquer aux signaux de turbulence, son étude reste passionnante.

Remerciements. Je souhaite remercier les personnes qui, par des discussions fréquentes et par des travaux communs, sont en fait derrière les idées exposées ici : Olivier Michel, Patrick Flandrin et Pierre-Olivier Amblard. Bernard Castaing, Christophe Baudet, Jean-François Pinton, Nicolas Mordant et Christos Vassilicos ont contribué significativement aussi à celles-ci par leurs travaux et le partage qu'ils en ont fait.

Références

- [Abr97] ABRY (P.), *Ondelettes et Turbulence*. Diderot Éditeur, Paris, 1997.
- [AGH88] ARNEODO (A.), GRASSEAU (G.) et HOLSCHNEIDER (M.), « Wavelet transform of multifractals », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, 1988, p. 2281–2284.
- [BA66] BARNES (J.) et ALLAN (A.), « A statistical model of flicker noise », *Proc. IEEE*, vol. 54, 1966, p. 176–178.
- [Bat53] BATCHELOR (G.), *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press, 1953.
- [BBO96] BERTRAND (J.), BERTRAND (P.) et OVARLEZ (J.), « The Mellin transform », dans POULARIKAS (A.), éditeur, *The Transforms and Applications Handbook*. CRC Press, 1996.
- [BFA02] BORGNAT (P.), FLANDRIN (P.) et AMBLARD (P.-O.), « Stochastic discrete scale invariance », *Signal Processing Lett.*, vol. 9, n° 6, juin 2002, p. 181–184.
- [BL80] BERRY (M.) et LEWIS (Z.), « On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function », *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 370, 1980, p. 459–484.
- [BLF53] BLANC-LAPIERRE (A.) et FORTET (R.), *Théorie des fonctions aléatoires*. Masson, Paris, 1953.
- [BMW99] BAUDET (C.), MICHEL (O.) et WILLIAMS (W.), « Detection of coherent vorticity structures using time-scale resolved acoustic spectroscopy », *Physica D*, vol. 128, 1999, p. 1–17.
- [Bor02] BORGNAT (P.), *Modèles et outils pour les invariances d'échelle brisée : variations sur la transformation de Lamperti et contributions aux modèles statistiques de vortexen turbulence*. PhD thesis, École normale supérieure de Lyon, novembre 2002.
- [Cas97] CASTAING (B.), « Turbulence : Statistical approach », dans DUBRULLE (B.), GRANER (F.) et SORNETTE (D.), éditeurs, *Scale Invariance and Beyond*, p. 225–234. Springer, 1997.
- [CBC95] CHAVARRIA (G.), BAUDET (C.) et CILIBERTO (S.), *Europhysics Lett.*, vol. 32, 1995, p. 319.
- [Cha01] CHAINAIS (P.), *Cascades log-infinitement divisibles et analyse multirésolution. Application à l'étude des intermittences en turbulence*. PhD thesis, École normale supérieure de Lyon, 2001.
- [Coh93] COHEN (L.), « The scale representation », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 41, n° 12, decembre 1993, p. 3275–3292.
- [Dav84] DAVIES (B.), *Integral transforms and their applications*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [DCB91] DOUADY (S.), COUDER (Y.) et BRACHET (M.), « Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, 1991, p. 983–986.
- [FB03] FLANDRIN (P.) et BORGNAT (P.). « On the chirp decomposition of Weierstrass-Mandelbrot functions, and their time-frequency interpretation ». to appear *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2003.
- [FBA02] FLANDRIN (P.), BORGNAT (P.) et AMBLARD (P.-O.). « From stationarity to self-similarity, and back : Variations on the Lamperti transformation ». to appear in "Long Range Dependent Stochastic Processes : Theory and applications", G. Rangarajan Editor, février 2002.
- [Fla93] FLANDRIN (P.), *Temps-Fréquence (1ère ed.)*. Hermes, 1993.

- [Fla98] FLANDRIN (P.). « Inequalities in Mellin-Fourier signal analysis ». Newton Institute Preprint NI98030-NSP, Cambridge, UK, novembre 1998.
- [FP85] FRISCH (U.) et PARISI (G.), « On the singularity structure of fully developed turbulence », dans GHIL (M.), BENZI (R.) et PARISI (G.), éditeurs, *Proc. of Int. School of Phys. on Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics*, p. 84–87, Amsterdam, 1985. North-Holland.
- [Fri95] FRISCH (U.), *Turbulence*. CUP, Cambridge, 1995.
- [Gag87] GAGNE (Y.), *Étude expérimentale de l'intermittence et des singularités dans le plan complexe en turbulence développée*. PhD thesis, INP Grenoble, 1987.
- [HV91] HUNT (J.) et VASSILICOS (J.), « Kolmogorov's contributions to the physical understanding of small-scale turbulence and recent developments », *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 434, 1991, p. 183–210.
- [Jaf97] JAFFARD (S.), « Multifractal formalism for functions, part 1 and 2 », *SIAM J. of Math. Anal.*, vol. 28, n° 4, 1997, p. 944–998.
- [JKVF93] J.C.R. HUNT, KEVLAHAN (N.), VASSILICOS (J.) et FARGE (M.), « Wavelets, fractals and fourier transforms : detection and analysis of structures », dans FARGE (M.), HUNT (J.) et VASSILICOS (J.), éditeurs, *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*, p. 1–38. Oxford : Clarendon Press, 1993.
- [Kol41a] KOLOMOGOROV (A.), « The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers », *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 30, 1941, p. 9–13.
- [Kol41b] KOLOMOGOROV (A.), « On degeneration of isotropic turbulence in a incompressible viscous liquid », *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 31, 1941, p. 538–540.
- [Lam62] LAMPERTI (J.), « Semi-stable stochastic processes », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 104, 1962, p. 62–78.
- [Lun82] LUNDGREN (T.), « Strained spiral vortex model for turbulent fine structure », *Phys. Fluids*, vol. 25, n° 12, 1982, p. 2193–2203.
- [LVC⁺01] LA PORTA (A.), VOTH (G.), CRAWFORD (A.), ALEXANDER (J.) et BODENSCHATZ (E.), « Fluid particle accelerations in fully developed turbulence », *Nature*, vol. 409, 2001, p. 1017–1019.
- [Mey90] MEYER (Y.), *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, 1990.
- [MMMP01] MORDANT (N.), METZ (P.), MICHEL (O.) et PINTON (J.), « Scaling and intermittency of Lagrangian velocity in fully developed turbulence », *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, 2001, p. 21–24.
- [Mof84] MOFFATT (H.), « Simple topological aspects of turbulent velocity dynamics », dans TATSUMI (T.), éditeur, *Turbulence and chaotic phenomena in fluids*, p. 223–230. Elsevier, 1984.
- [Mof93] MOFFATT (H.), « Spiral structures in turbulent flows », dans FARGE (M.), HUNT (J.) et VASSILICOS (J.), éditeurs, *Wavelets, Fractals, and Fourier Transforms*, p. 317–324. Oxford : Clarendon Press, 1993.
- [Mor01] MORDANT (N.), *Mesure lagrangienne en turbulence : mise en œuvre et analyse*. PhD thesis, École normale supérieure de Lyon, 2001.
- [MV68] MANDELBROT (B.) et VAN NESS (J. W.), « Fractional Brownian motions, fractional Brownian noises and applications », *SIAM review*, vol. 10, 1968, p. 422–437.
- [MY71] MONIN (A.) et YAGLOM (A.), *Statistical fluid mechanics (vol. 1 and 2)*. The MIT Press, 1971.
- [NG99] NORET (E.) et GUGLIELMI (M.), « Modélisation et synthèse d'une classe de signaux auto-similaires et à mémoire longue », dans *Proc. Conf. Delft (NL) : Fractals in Engineering*, p. 301–315. INRIA, 1999.
- [Nic02] NICOLAS (J.). « Introduction aux statistiques de deuxième espèce : Applications aux lois d'images SAR ». Rapport interne, ENST, Paris, février 2002.
- [NP99] NUZMAN (C.) et POOR (V.), « Transformed spectral analysis of self-similar processes », dans *Proc. CISS'99*, mai 1999.
- [NP00] NUZMAN (C.) et POOR (V.), « Linear estimation of self-similar processes via Lamperti's transformation », *J. of Applied Probability*, vol. 37, n° 2, juin 2000, p. 429–452.
- [PPB⁺03] PIETROPINTO (S.), POULAIN (C.), BAUDET (C.), CASTAING (B.), CHABAUD (B.), GAGNE (Y.), ANDY. LADAM (B. H.), LEBRUN (P.), PIROTTE (O.) et ROCHE (P.), « Superconducting instrumentation for high Reynolds turbulence experiments with low temperature gaseous helium », *Physica C*, n° 386, 2003, p. 512–516.
- [Ver87] VERVAAT (W.), « Properties of general self-similar processes », *Bull. of International Statistical Inst.*, vol. 52, 1987, p. 199–216.
- [YK97] YAZICI (B.) et KASHYAP (R. L.), « A class of second-order stationary self-similar processes for $1/f$ phenomena », *IEEE Trans. on Signal Proc.*, vol. 45, n° 2, 1997, p. 396–410.
- [Zem87] ZEMANIAN (A.), *Generalized integral transforms*. Dover, 1987.