



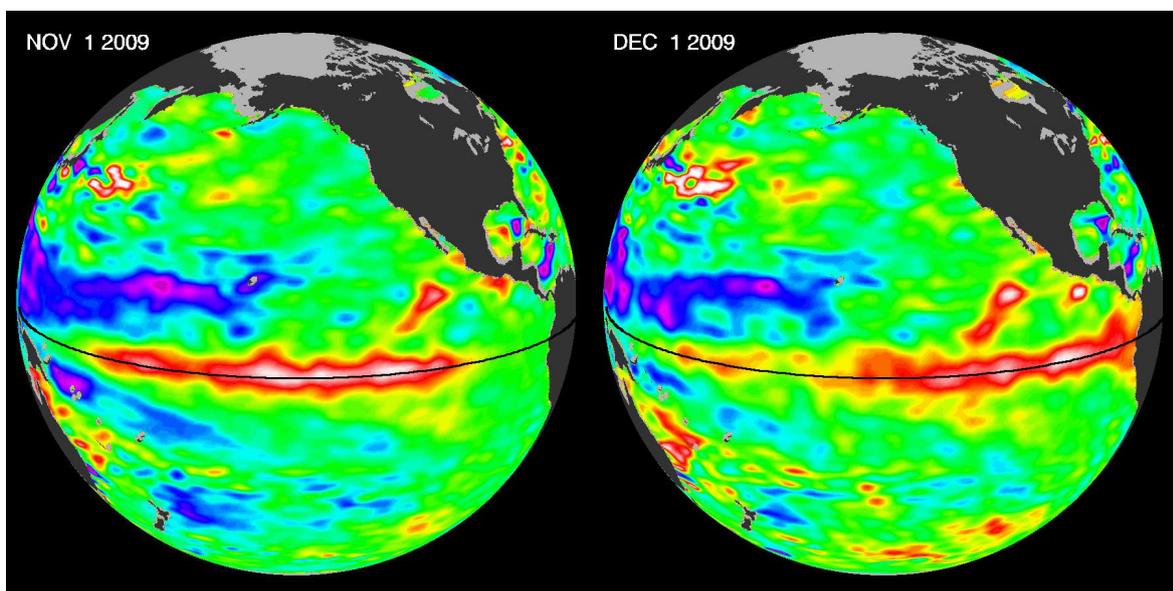
De la topologie dans les ondes équatoriales

- P. DELPLACE
- A. VENAILLE

Les ondes équatoriales atmosphériques et océaniques correspondent à des anomalies de température qui se propagent le long de l'équateur à l'échelle planétaire. Certaines de ces ondes ne peuvent se propager que d'ouest en est. C'est le cas des ondes de Kelvin, observées notamment dans le Pacifique et identifiées comme un précurseur du phénomène El Niño. Ces ondes unidirectionnelles ont été découvertes dans les années 1960, mais leur origine physique restait jusque là

mystérieuse. La topologie des fibrés vectoriels apporte un regard nouveau sur ce problème. Elle met en évidence les ingrédients physiques minimaux pour l'existence d'ondes unidirectionnelles piégées autour de l'équateur, et soulignent le rôle crucial des symétries du modèle physique sous-jacent. Par ailleurs, les ondes équatoriales donnent un nouvel exemple de manifestation physique du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer.

FIGURE 1 – Onde de Kelvin équatoriale. Propagation d'une anomalie de température dans l'océan pacifique entre le 1^{er} novembre 2009 (à gauche) et le 1^{er} décembre 2009 (à droite). La couleur rouge correspond à des anomalies de températures d'environ +2 degrés. L'arrivée de températures anormalement chaudes sur la côte péruvienne correspond au début du phénomène El Niño. On peut interpréter ces variations horizontales de température comme des variations horizontales de l'élévation de l'interface entre deux couches d'un modèle d'eau peu profonde.



© Courtesy NASA/JPL-Caltech. Source : Jet Propulsion Laboratory

1. Ondes en eau peu profonde

Le modèle d'eau peu profonde. La découverte des ondes équatoriales dans les années 60 s'inscrit dans la continuité d'une série de travaux sur les oscillations libres d'un fluide à la surface d'une planète en rotation, qui commence avec la théorie dynamique des marées introduite par Laplace en 1776 [9]. À l'échelle planétaire, l'océan et l'atmosphère sont de fines couches de fluides (figure 2). Ils sont bien décrits par le modèle d'eau peu profonde. La dynamique s'exprime par l'évolution d'un champ de vitesse horizontal $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ couplé à l'évolution de l'épaisseur du fluide $h(\mathbf{x}, t)$:

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -g \nabla h - f \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}. \tag{2}$$

Ces équations traduisent la conservation locale de la masse et de la quantité de mouvement, pour un fluide de densité homogène, dans un référentiel tournant avec la planète. Le gradient horizontal de hauteur correspond à un gradient de pression, le fluide étant à l'équilibre hydrostatique dans la direction verticale, avec g la constante de gravité. La force de Coriolis $f \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}$ jouera un rôle central dans ce qui suit. Le paramètre de Coriolis $f = 2\Omega \cdot \hat{\mathbf{n}}$ correspond à deux fois la projection du vecteur de rotation planétaire Ω sur l'axe vertical local $\hat{\mathbf{n}}$ (figure 2a). Le paramètre de Coriolis augmente donc du sud au nord, et s'annule à l'équateur. Ce modèle d'eau peu profonde peut être dérivé des équations d'Euler 3D incompressibles dans la limite d'une couche de fluide infiniment fine. La rotation de la planète induit aussi une force centrifuge, mais cette force peut être absorbée dans la définition du potentiel gravitationnel ; sa contribution est prise compte dans la constante de gravité g .

L'équation de Laplace. Dans la limite des oscillations de faible amplitude autour d'un état au repos, les équations du mouvement (1)-(2) peuvent dans une bonne approximation être linéarisées :

$$\partial_t \eta = -H \nabla \cdot \mathbf{u}, \tag{3}$$

$$\partial_t \mathbf{u} = -g \nabla \eta - f \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}, \tag{4}$$

où η est la variation de l'interface par rapport à la hauteur au repos $h = H$. Si l'on ajoute un terme de forçage oscillant du à l'attraction de la Lune ou du soleil dans les équations du moment (4), on retrouve le système d'équations considéré par Laplace dans sa théorie dynamique des marées.

En l'absence de forçage et dans un cas non tournant ($f = 0$), on obtient l'équation de d'Alembert $\partial_{tt} \eta = c^2 \Delta \eta$ avec la célérité $c = \sqrt{gH}$ et l'opérateur Laplacien Δ . Les oscillations libres de ces équations sont les solutions de la forme $\hat{\eta}(x, y) e^{i\omega t}$. Pour une planète en rotation, le calcul analytique des oscillations libres sur une surface arbitraire, et en particulier sphérique, devient notoirement difficile. De fait, une description correcte des marées terrestres à l'échelle planétaire ne fut possible qu'au début des années 80 avec l'arrivée d'observations suffisamment précises par imagerie satellite (figure 7) et d'ordinateurs suffisamment puissants pour calculer numériquement les modes propres du modèle d'eau peu profonde dans des bassins océaniques.

L'hypothèse du plan f. Pour mieux comprendre la structure des oscillations libres du modèle d'eau peu profonde en présence de rotation, William Thomson (plus tard Lord Kelvin) propose en 1880 de simplifier le problème [13]. D'abord, il suppose un mouvement fluide dans un plan tangent à la sphère (figure 2b). Cette première hypothèse élimine les complications liées à la courbure de la planète. Ensuite, il considère que le paramètre de Coriolis ne varie pas dans le plan. Sa deuxième hypothèse permet d'obtenir une équation différentielle partielle à coefficients constants. C'est le modèle du plan-f. En notant (x, y) les coordonnées longitudinale et méridionale, (u, v) les deux composantes du champ de vitesse dans ce repère, les oscillations libres du fluide dans un plan f s'écrivent sous la forme

$$(\eta, u, v) = \text{Re}\{(\hat{\eta}, \hat{u}, \hat{v}) e^{i\omega t - ik_x x - ik_y y}\},$$

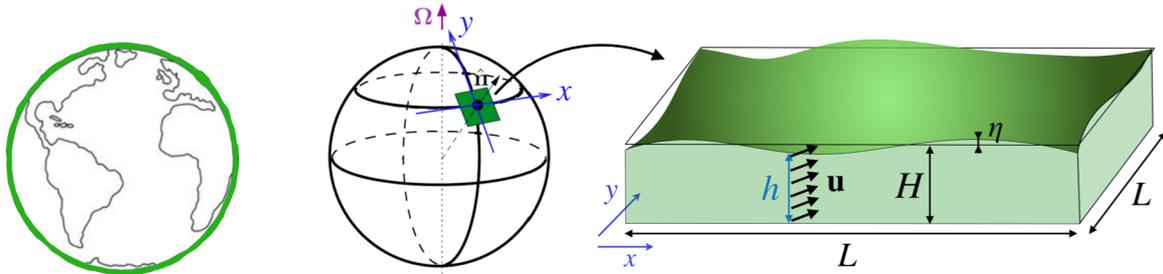
où k_x et k_y sont des nombres d'ondes réels, et ω la fréquence des oscillations libres à déterminer. Le calcul des modes propres du problème (4) est alors réduit à la diagonalisation d'une matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & k_x & k_y \\ k_x & 0 & -if \\ k_y & if & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Ici et dans la suite de l'exposé, nous avons adimensionnalisé les équations de sorte à avoir $g = H = 1$, ce qui correspond à une célérité $c = 1$.

Ondes de Poincaré et modes géostrophiques. Pour un triplet de paramètres (k_x, k_y, f) non nul, il existe trois modes propres solutions du problème (5), associés à trois valeurs propres distinctes $(\omega_-, \omega_0, \omega_+)$ (figure 3 b) :

FIGURE 2 – Modèle d'eau peu profonde sur la sphère et plan f . À gauche, les océans comme l'atmosphère (en vert) peuvent être considérés sur des grandes distances comme des fluides bidimensionnels. Plus localement (au milieu) la courbure de la terre peut être ignorée et le fluide à une latitude donnée est alors considéré dans le plan tangent à la terre où le paramètre de Coriolis f est fixé; c'est l'approximation du plan f . À droite, la fine couche de fluide du plan f a une hauteur $h(x, y) = H + \eta(x, y)$ variable et un champ de vitesse $\mathbf{u} = (u(x, y), v(x, y))$ homogène dans son épaisseur.



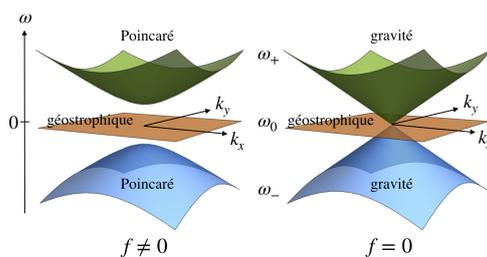
- Les modes de fréquence $\omega_0 = 0$ sont appelés *modes géostrophiques* car ils satisfont l'équilibre géostrophique, qui correspond à une compensation exacte des forces de pression par la force de Coriolis : $-\nabla\eta_0 = f\hat{n} \times \mathbf{u}_0$. Cet équilibre géostrophique est bien utile en météorologie car il permet d'interpréter les isobares comme des lignes de courant pour les vents.
- Les modes de fréquence $\omega_{\pm} = \pm\sqrt{f^2 + k_x^2 + k_y^2}$ sont appelées *modes de Poincaré*, en référence à ses travaux sur les marées, ou *ondes d'inertie-gravité* de surface. *Gravité* car on retrouve la relation de dispersion des ondes de surface d'eau peu profonde sans rotation dans la limite des grands nombre d'ondes. *Inertie* car la relation de dispersion dépend de la rotation via le paramètre de Coriolis f .

Remarquons que le paramètre de Coriolis $f \neq 0$ induit l'existence d'une bande de fréquences interdites $0 < |\omega| < f$ entre les modes géostrophiques et les modes de Poincaré.

Les limites du plan f . Lorsque le plan f devient tangent à l'équateur, le paramètre de Coriolis s'annule, et tout se passe comme si la rotation ne jouait aucun rôle. L'hypothèse du plan f est donc trop brutale pour la dynamique équatoriale, qui est de fait influencée par la rotation. Le spectre des ondes de plan $f = 0$ fournit tout de même une information importante : les bandes de Poincaré touchent la bande des modes géostrophiques en $\mathbf{k} = 0$ (figure 3). La présence d'un tel point de croisement entre les trois

bandes d'ondes du plan f va jouer un rôle clé dans l'interprétation du spectre des ondes équatoriales.

FIGURE 3 – Relation de dispersion des ondes en eau peu profonde sur le plan f . a) $f \neq 0$: pour $0 < |\omega| < f$, il n'existe pas d'ondes propagatives. b) $f = 0$: on remarque l'existence d'un point de dégénérescence en $(k_x, k_y) = (0, 0)$.



2. Le cas équatorial

L'hypothèse de plan beta. Afin de rendre compte de l'effet de la rotation à l'équateur dans un cadre simple, Taroh Matsuno eut en 1966 l'idée astucieuse [10] de conserver l'hypothèse de Kelvin d'un mouvement dans un plan infini, tout en considérant un paramètre de Coriolis qui varie linéairement dans la direction méridionale : $f = \beta y$. C'est le modèle du plan beta, qui réintroduit indirectement l'effet de la courbure terrestre via la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude. En quelque sorte, le plan beta permet de décrire un équateur sur une terre fictive plate et infinie.

La dynamique est toujours invariante dans la direction x , mais le terme $f = \beta y$ brise l'invariance suivant y ; les oscillations libres s'écrivent donc sous la forme $(\eta, u, v) = (\hat{\eta}, \hat{u}, \hat{v})e^{i\omega t - ik_x x}$, où $(\hat{\eta}(y), \hat{u}(y), \hat{v}(y))$ est solution du problème

$$\begin{pmatrix} 0 & k_x & -i\frac{d}{dy} \\ k_x & 0 & -i\beta y \\ -i\frac{d}{dy} & i\beta y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

avec la condition de champs de vitesses qui s'annulent à l'infini. Il s'agit d'une équation matricielle aux valeurs propres pour le vecteur $(\hat{\eta}, \hat{u}, \hat{v})$, correspondant à trois équations différentielles couplées pour chacune des composantes. En découplant ces équations, Matsuno a montré que le champ v satisfait une équation formellement analogue à celle de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique

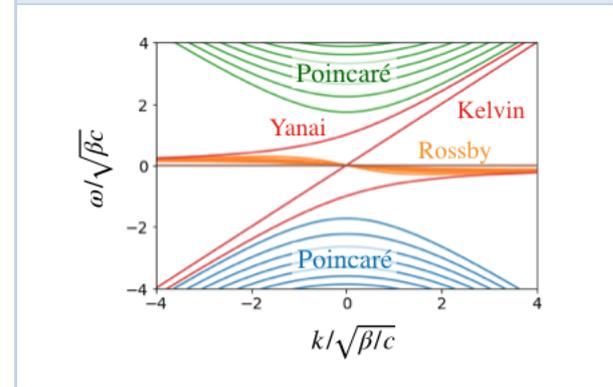
$$-\left(\frac{d^2}{dy^2} - \beta^2 y^2\right)\hat{v} = \left(\omega^2 - k_x^2 + \frac{k_x}{\omega}\right)\hat{v} \quad (7)$$

dont les modes propres sont donnés par les polynômes d'Hermite et dont le spectre de valeurs propres ω est discret et satisfait $\omega^2 - k_x^2 + \frac{k_x}{\omega} = 2n+1$, avec $n \in \mathbb{N}$. La relation de dispersion $\omega(k_x)$ des différents modes est tracée sur la figure 4. Elle montre le regroupement de modes en bandes représentées en orange, vert et bleu. La relation de dispersion du mode $n = 0$, appelé mode de Yanai, est toutefois un peu particulier car il transite d'une bande à l'autre. Matsuno a aussi remarqué que le problème initial (6) admet pour solution non triviale un autre mode qui satisfait $\hat{v} = 0$ en tout point (x, y) . De façon remarquable, la relation de dispersion de ce mode, appelé mode de Kelvin, transite également d'une bande à l'autre.

Flot spectral. Le spectre obtenu avec l'hypothèse du plan beta a, outre son caractère discret, une structure globale proche de celle obtenue dans l'approximation du plan f , avec une bande de modes géostrophiques à basse fréquence et une bande de modes de Poincaré à haute fréquence. Il y a, cependant, une différence remarquable : des modes transitent d'une bande à l'autre lorsque le nombre d'onde longitudinal k_x varie de $-\infty$ à $+\infty$; la bande de Poincaré de fréquence positive gagne deux modes, la bande de Poincaré de fréquence négative en perd deux, et le gain net de la bande des modes géostrophiques est nul. On appelle *flot spectral* le transit de modes d'une bande d'ondes vers une autre lorsque que l'on change continûment un

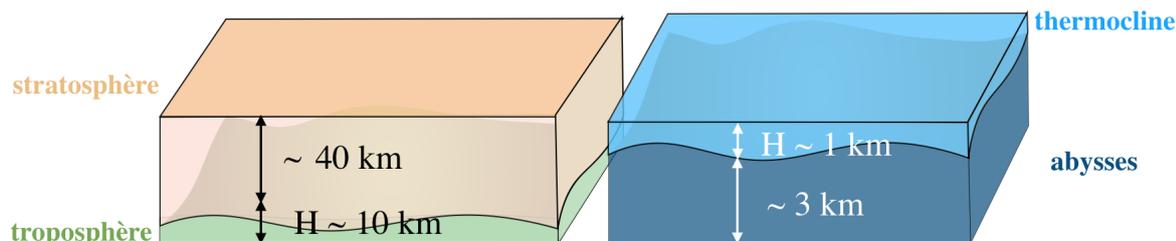
paramètre du problème. Ce flot spectral est une propriété extrêmement robuste du modèle : on peut changer les paramètres, par exemple la forme du profil $f(y)$, on peut aussi rajouter du désordre, par exemple des irrégularités de topographie au fond de l'océan; la forme du spectre changera, mais le flot spectral net ne changera pas. Cette simple observation suggère l'existence d'une propriété topologique associée au flot spectral que l'on mettra en évidence dans la section 3.

FIGURE 4 – Relation de dispersion sur le plan beta. On remarque trois différences avec le spectre des ondes peu profondes sur le plan f tracé figure 3 : (i) le spectre est discret (ii) la dégénérescence des modes géostrophiques est en partie levée, avec l'apparition des ondes de Rossby (orange) (iii) il existe deux nouveaux modes qui transitent d'une bande à l'autre : l'onde de Kelvin et l'onde de Yanai.



Ondes de Kelvin équatoriales, ondes de Yanai. Avant de détailler ces propriétés topologiques, revenons aux ondes calculées par Matsuno avec l'hypothèse du plan beta, à leur observation et à leurs conséquences. On voit sur la figure 4, qu'en présence d'un gradient βy (on parle de gradient de vorticité planétaire), une partie de la dégénérescence des modes géostrophiques de fréquence nulle sur le plan f est levée. Il s'agit des *ondes de Rossby* planétaires, en l'honneur du météorologue Gustav Rossby qui a montré le rôle crucial joué par le gradient de vorticité planétaire βy dans la dynamique de ces ondes. Leur caractéristique remarquable est d'avoir une vitesse de phase toujours dirigée vers l'ouest ($c_\varphi \equiv \omega/k_x < 0$). En revanche, leur vitesse de groupe ($c_g \equiv \partial_{k_x} \omega$) change de signe : elle est dirigée vers l'ouest à petit nombre d'onde, mais vers l'est à grand nombre d'onde. Ainsi, les ondes de Rossby ne participent pas au flot spectral d'une bande à

FIGURE 5 – Dans le contexte géophysique, on utilise souvent le modèle d'eau peu profonde introduit au début du texte pour décrire une couche active au dessus d'une couche au repos. Les variations de hauteur sont alors dominées par les variations de hauteur de l'interface interne entre les deux couches. La couche active atmosphérique est souvent la troposphère où ont lieu la majeure partie des phénomènes météorologiques. La couche active océanique est souvent la thermocline en surface.



l'autre : elles restent dans la bande centrale des modes géostrophiques.

Parmi les branches qui transitent d'une bande à l'autre, on distingue la branche d'ondes *mixte Rossby-gravité*, qui connecte les bandes d'ondes de Poincaré à la bande géostrophique, et la branche d'ondes de Kelvin équatoriales, qui connecte les deux bandes de Poincaré. L'onde mixte de Rossby-gravité est aussi appelée *onde de Yanai*, qui est le premier à l'avoir observée. L'onde de Kelvin équatoriale a la particularité de se propager de manière non-dispersive vers l'est, à la vitesse des ondes de surface d'eau peu profonde sans rotation $c = \sqrt{gH}$. Kelvin avait obtenu une solution similaire se propageant le long d'une côte sur un plan f , d'où le nom donné à sa cousine équatoriale.

Observations par imagerie satellite. Les ondes de Yanai et de Kelvin équatoriales sont observées dans l'atmosphère et l'océan depuis la fin des années 60, avec l'arrivée des images satellites. C'est l'un des rares cas de dynamique des fluides géophysiques où un phénomène est prédit avant son observation. Quelques remarques et précisions sur ces observations sont nécessaires. Les écoulements océaniques et atmosphériques sont en réalité stratifiés en densité : l'air est plus léger avec l'altitude, de même que les eaux profondes des océans sont plus lourdes qu'en surface, ces variations étant en grande partie dues à des différences de température. De fait, les ondes équatoriales sont souvent révélées par l'observation de champs de température à l'échelle planétaire. Comment décrire ces

champs de température avec le modèle d'eau peu profonde ?

Il suffit pour cela de considérer un modèle à deux couches de densités différentes, ou, de manière équivalente, de deux températures différentes, comme illustré sur la figure 5. L'une des deux couches est supposée active, l'autre au repos. Dans l'océan, la couche active est la thermocline : c'est une couche de surface au dessus des abysses plus profondes, plus calmes et plus froides. Dans l'atmosphère, la couche active est la troposphère, où sont confinés les nuages et une grande partie de la dynamique météorologique¹.

Dans la limite des petites variations de densité relative entre les deux couches, les variations de hauteur d'eau de la couche active sont dominées par les variations de hauteur d'interface interne η_i . Le modèle précédent est toujours valide, mais décrit les variations de l'interface interne plutôt que de la surface libre. Il est alors possible de lier ces variations horizontales d'interface interne à des variations horizontales d'un champ bi-dimensionnel de température effective $\bar{T}(x, y)$. Cette température effective est obtenue via une moyenne verticale de la température sur les deux couches d'épaisseur $H_i(x, y)$: $\bar{T}(x, y) = (H_1(x, y)T_1 + H_2(x, y)T_2)/(H_1(x, y) + H_2(x, y))$. En ce sens, on peut associer des variations horizontales de température à des variations de hauteur d'eau pour la couche active.

Ainsi, l'onde de Kelvin de la figure 1 n'est pas seulement une anomalie de température, c'est aussi une immense vague interne, à l'échelle pla-

1. En réalité, des ondes se propagent aussi dans les abysses et la stratosphère et l'analyse fine des observations requiert la prise en compte de la stratification continue en densité de ces écoulements.

nétaire! L'image montre le piégeage de l'onde autour de l'équateur, sa structure symétrique par rapport à celui-ci et sa propagation vers l'est, en accord avec la prédiction de Matsuno. L'onde de Yanai est plus difficile à repérer pour deux raisons. Premièrement, cette onde est dispersive : des paquets d'ondes initialement bien localisés s'étalent rapidement. Deuxièmement, le champ de température associé à l'onde est anti-symétrique autour de l'équateur, alors que le forçage radiatif excite préférentiellement les modes symétriques. Dans l'atmosphère, la présence d'une onde de Yanai se manifeste parfois par une répartition asymétrique et régulière d'amas de nuages autour de l'équateur. En effet, leur formation est favorisée dans les zones de courants verticaux ascendants, eux même liés aux champs de température.

L'importance des ondes équatoriales pour la variabilité climatique. Les ondes de Yanai et de Kelvin équatoriales sont impliquées dans plusieurs phénomènes qui jouent un rôle central dans la dynamique du climat.

L'exemple le plus marquant est le rôle des ondes de Kelvin équatoriales dans l'oscillation El Nino. Il s'agit d'un phénomène non-linéaire couplé entre océan et atmosphère dans l'océan Pacifique. En temps normal, les alizés soufflent vers l'ouest et poussent les masses d'eau chaude du Pacifique vers l'Indonésie. Lorsque ces vents faiblissent, l'anomalie de température positive initialement à l'ouest de l'océan Pacifique traverse en deux ou trois mois le bassin océanique (figure 1), jusqu'à atteindre la côte du Pérou : cette propagation vers l'est est bien décrite par un paquet d'ondes de Kelvin équatoriales. La présence d'eau anormalement chaude au large du Pérou est le début de l'année El Nino, et favorise la convection humide dans l'atmosphère, avec des précipitations anormalement élevées en Amérique du Sud, et une rétroaction sur la dynamique des vents. Ce phénomène couplé donne lieu à une dynamique chaotique, avec des cycles de 3 à 7 ans.

Les ondes de Yanai et de Kelvin équatoriales sont aussi impliquées dans l'oscillation quasi-biennale des vents stratosphériques : entre 15 et 35 km de hauteur, les vents équatoriaux changent de direction tous les 28 mois, avec des vitesses typiques de 100 km/h. Ces renversements lents des vents équatoriaux sont maintenant compris comme un phénomène de rectification des ondes qui se propagent et se dissipent dans les régions forte-

ment stratifiées de l'atmosphère équatoriale, et des phénomènes analogues sont observés sur d'autres planètes.

Résumons. Le rôle clé joué par les ondes de Kelvin et de Yanai dans divers phénomènes climatiques tropicaux est du à trois propriétés qui les distinguent des autres ondes :

- (i) Leur vitesse de groupe zonale $c_g \equiv \partial_k \omega$ est toujours positive. Ce sont des états unidirectionnels qui ne peuvent propager l'énergie que vers l'est.
- (ii) Elles remplissent la bande de fréquence entre les modes géostrophiques et les modes de Poincaré. Ce sont les seuls modes qui peuvent être excités dans cette gamme de fréquence.
- (iii) Ce sont les modes propres les plus localisés autour de l'équateur.

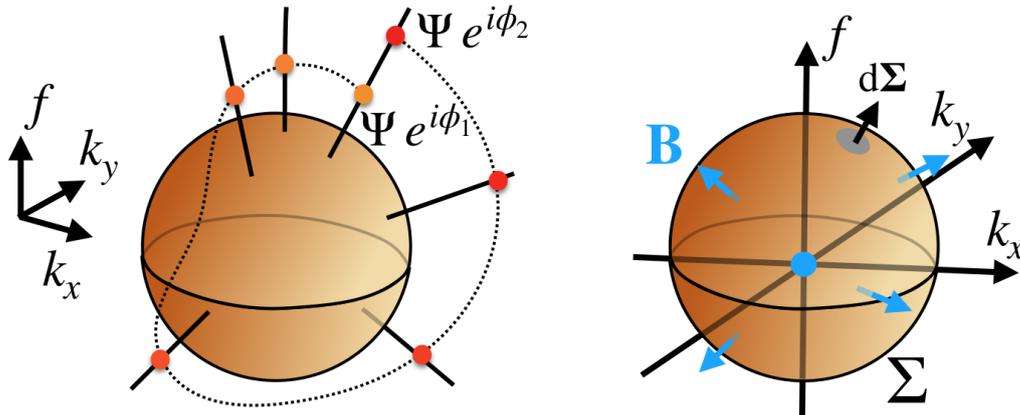
La topologie des fibrés vectoriels va nous permettre de mieux comprendre l'origine de ces propriétés.

3. Un invariant topologique dans les ondes de Poincaré

Afin d'identifier l'origine physique du flot spectral des modes équatoriaux calculés par Matsuno et tracés sur la figure 4, nous allons revenir au cas plus simple du plan f . Plus précisément, nous allons nous intéresser aux propriétés topologiques de familles d'ondes du plan f sur une surface fermée de l'espace des paramètres (k_x, k_y, f) . En termes mathématiques, ces familles d'ondes sont des *fibrés vectoriels*, et nous proposons de calculer un invariant topologique pour ces fibrés, le *premier nombre de Chern*. Nous remarquerons que cet invariant topologique du problème de Kelvin est lié au flot spectral du problème de Matsuno [3].

Fibrés vectoriels. Pour chaque triplet (k_x, k_y, f) , les trois modes propres normés du plan f notés $\Psi_{\pm}(k_x, k_y, f)$ (modes de Poincaré) et $\Psi_0(k_x, k_y, f)$ (modes géostrophiques) sont définis à une phase près. Les bandes sont bien définies partout, sauf au point de croisement des bande en $(k_x, k_y, f) = (0, 0, 0)$. En dehors du point de croisement, ces modes définissent trois espaces vectoriels, appelé fibres. L'ensemble des fibres paramétrées sur une surface fermée de l'espace $(k_x, k_y, f) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, appelée espace de base, constitue un fibré vectoriel. Dans notre cas, il y a trois fibrés vectoriels, un par

FIGURE 6 – Fibré vectoriel des ondes de Poincaré. Pour chaque valeur des paramètres $(k_x, k_y, f) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, chaque état propre normé Ψ du plan f est défini à une phase près et peut être paramétré sur une sphère de rayon unité dans \mathbb{R}^3 . L'ensemble forme un fibré vectoriel complexe de dimension complexe 1 défini au-dessus de la sphère. L'impossibilité de définir continûment la phase des états sur toute la sphère est la manifestation d'une propriété topologique du fibré. Cette propriété topologique est capturée par le premier nombre de Chern. Ce nombre entier peut être vu comme le flux quantifié de la courbure de Berry \mathbf{B} à travers la sphère, de façon analogue à la charge d'un monopole magnétique obtenu comme le flux du champ magnétique qu'il génère. Ici, c'est le point de dégénérescence des trois états propres (Poincaré et géostrophique) qui joue le rôle du monopole magnétique.



état propre. Plus précisément, ce sont des fibrés vectoriels complexes de rang 1. Les fibrés vectoriels sont des objets topologiques que l'on peut classer en fonction d'invariants, de la même manière que l'on classe les surfaces fermées en fonction du genre, qui compte le nombre de trous dans ces surfaces. L'invariant topologique sera ici le premier nombre de Chern du fibré, qui décrit l'impossibilité de définir continûment la phase des modes propres en tout point de l'espace de base, et qui peut être associé à l'enroulement des fibres (figure 6).

Le fibré des modes de Poincaré. Afin d'illustrer l'enroulement des fibrés vectoriels sur le plan f autour du point de croisement des bandes en 0 dans l'espace \mathbb{R}^3 de coordonnées (k_x, k_y, f) , considérons les modes propres normés de la bande de Poincaré de fréquence positive

$$\omega_+ = \sqrt{f^2 + k_x^2 + k_y^2}.$$

Ces modes se paramétrisent sur la sphère unité centrée en l'origine dans l'espace des paramètres (k_x, k_y, f) , et s'expriment donc de manière simple avec les coordonnées angulaires (θ, φ) :

$$\Psi_+ = \begin{pmatrix} \eta_+ \\ u_+ \\ v_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \varphi - i \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi + i \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (8)$$

Ce mode propre correspond à une section du fibré des modes de Poincaré sur la sphère unité. Cette section admet deux singularités en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, où les modes propres sont multivalués et tournent d'un angle 2π avec la longitude φ . Une autre section $\tilde{\Psi}_+ = e^{i\alpha(\theta, \varphi)} \Psi_+$ correspondant à un autre choix de phase permet d'annihiler localement ces singularités, mais ne fait que les déplacer sur la sphère unité. L'impossibilité de supprimer ces singularités globalement est une propriété topologique du fibré caractérisée par le premier nombre de Chern.

Premier nombre de Chern. Pour chaque bande n , cet invariant noté $\mathcal{C}^{(n)}$ peut être calculé via l'intégration de la courbure de Berry $\mathcal{B}^{(n)}$ sur l'espace de base du fibré – de la même façon que le genre d'une surface fermée peut être calculé en intégrant la courbure de Gauss sur cette surface via la formule de Gauss-Bonnet :

$$\mathcal{C}^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \mathcal{B}^{(n)}, \quad \mathcal{C}^{(n)} \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

La courbure de Berry est une 2-forme différentielle ²

$$\mathcal{B}^{(n)} = i \sum_{i,j} \langle \partial_{x_i} \Psi_n | \partial_{x_j} \Psi_n \rangle dx_i \wedge dx_j, \quad (11)$$

où $\Psi_n = (\eta_n, u_n, v_n)$ est un mode propre formé de la bande n , avec les notations usuelles bra-kets pour le produit scalaire dans \mathbb{C}^3 . La courbure de Berry s'interprète comme le rotationnel d'une connection de Berry qui permet de comparer deux fibres adjacentes sur l'espace de base du fibré. La courbure est une quantité locale géométrique, qui dépend du choix de la surface de base du fibré dans l'espace des paramètres, mais qui ne dépend pas du choix de la section du fibré, i.e. du choix de phase pour les modes propres. La généralisation de la formule de Gauss-Bonnet proposée par Shiing-shen Chern en 1945 lie cette quantité géométrique à un invariant topologique du fibré, le premier nombre de Chern, via (9).

Charges topologiques du point de dégénérescence. Une application directe de la formule (9) de Chern-Gauss-Bonnet permet de calculer le premier nombre de Chern $\mathcal{C}^{(+)}$ du fibré des ondes de Poincaré de fréquence positive sur la sphère unité dans l'espace des paramètres, à l'aide de leur expression (8) [3] (voir aussi ref. [4] pour le calcul du premier nombre de Chern dans ce problème sans utiliser la courbure de Berry). On procède de même pour les deux autres modes propres du problème, ce qui donne un triplet d'invariants topologiques

$$\{\mathcal{C}^{(-)}, \mathcal{C}^{(0)}, \mathcal{C}^{(+)}\} = \{2, 0, -2\}. \quad (12)$$

Une déformation continue de la surface de l'espace de base ne change pas le nombre de Chern du fibré, tant que la surface entoure le point de dégénérescence. Les fibrés deviennent tous triviaux quand le point de dégénérescence est à l'extérieur de la surface. Pour cette raison, on dit que ce point porte une charge topologique donnée par le nombre de Chern du fibré qui l'entoure. Par analogie avec le champ induit par un monopole magnétique, cette charge topologique peut aussi être interprétée comme un monopole de Berry qui induit la courbure de Berry observée. Dans le cas du plan f , le point de dégéné-

rescence est triple, et porte donc trois charges topologiques, données par l'équation (12). La présence d'une charge topologique non-nulle pour les ondes de Poincaré est une obstruction qui empêche de déformer continûment l'ensemble des ondes d'un hémisphère vers un autre.

Revenons au flot spectral $\Delta \mathcal{N}^{(n)}$ du plan beta, défini comme le nombre algébrique de modes qui transitent vers la bande n lorsque k_x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Nous remarquons qu'il est égal à l'opposé du nombre de Chern des bandes du plan f à travers la formule

$$\Delta \mathcal{N}^{(n)} = -\mathcal{C}^{(n)}. \quad (13)$$

En théorie des opérateurs, la matrice définie par l'équation (5) pour calculer les modes propres du plan f est le *symbole* de l'opérateur différentiel (6) du plan beta. La relation (13) entre spectre de l'opérateur différentiel du problème de Matsuno et indice topologique du problème de Kelvin est un cas particulier d'un résultat établi en 2001 par Frédéric Faure et Boris Zhilinskii (formule 15 dans [6]). Ils montrent que cette formule prend racine dans le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, et ces résultats ont récemment été repris dans un cadre plus général [4].

L'existence des ondes de Yanai et de Kelvin équatoriales est alors garantie par la topologie dans des configurations plus générales que celles considérées par Matsuno. Il suffit que le paramètre f varie d'une valeur négative (un hémisphère sud) vers une valeur positive (un hémisphère nord). L'approximation du plan beta apparaît alors comme une forme normale de ce problème plus général.

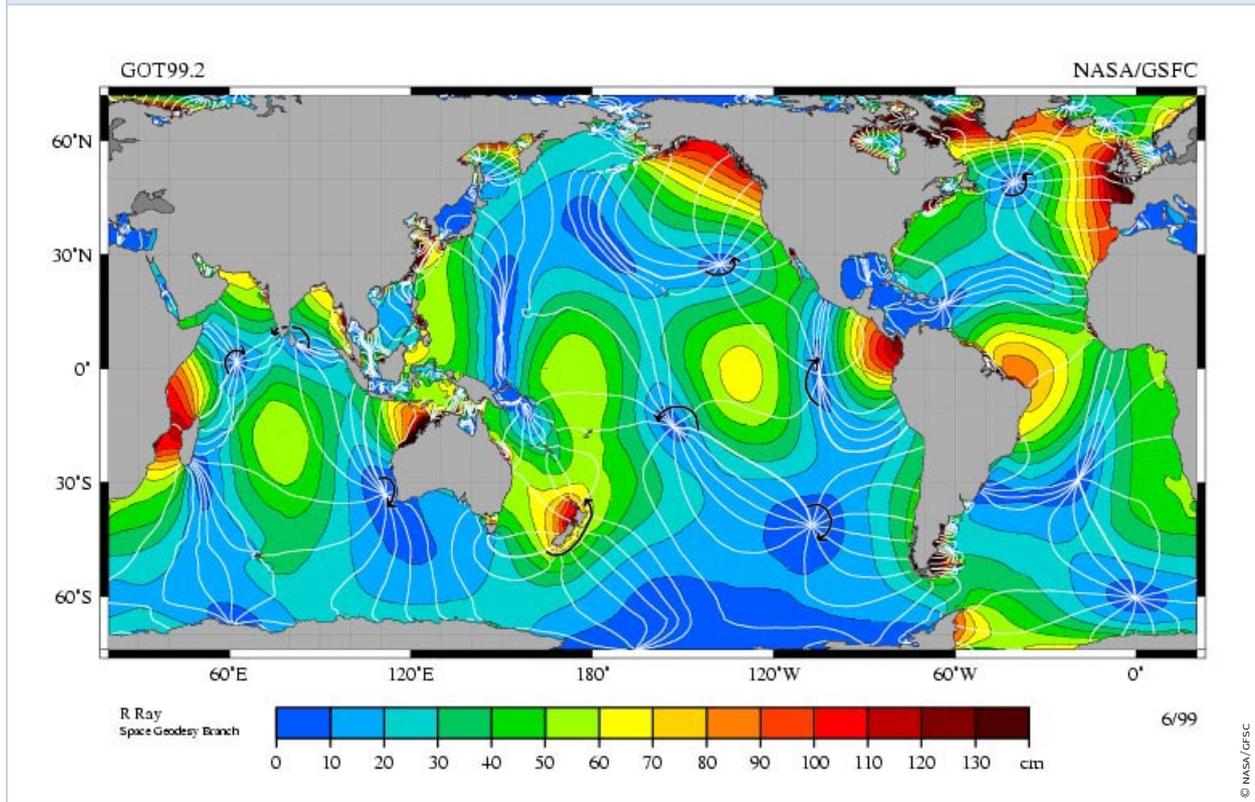
Au delà du cas équatorial et moléculaire, des exemples similaires apparaissent dans de nombreux systèmes physiques; citons par exemple le cas du spectre d'excitation de l'hélium 3 superfluide [15], du spectre de vibration-rotation des molécules [5], des systèmes photoniques [12], ou les gaz d'électrons en présence d'un champ magnétique [2]. C'est d'ailleurs dans le contexte des gaz bidimensionnels d'électrons que le nombre de Chern est apparu pour la première fois en physique.

2. Dans le cas présent d'un espace des paramètres x_i tridimensionnel, la 2-forme $\mathcal{B}^{(n)} = i \sum_{i,j} B_{ij}^{(n)} dx_i \wedge dx_j$ peut s'écrire sous la forme d'un vecteur $\mathbf{B}^{(n)} = (B_{23}^{(n)}, B_{31}^{(n)}, B_{n,12}^{(n)})$:

$$\mathbf{B}^{(n)} \equiv i \sum_{j=1}^3 \nabla_p \times (\Psi_{n,j}^* \nabla_p \Psi_{n,j}), \quad (10)$$

où ∇_p est l'opérateur gradient dans l'espace des paramètres et $\Psi_{n,j}^*$ est le complexe conjugué de la composante $\Psi_{n,j}$.

FIGURE 7 – Carte des marées obtenue par imagerie satellite. Les couleurs donnent l’amplitude des marées, les lignes blanches sont les isophases : en chaque point d’une ligne, la marée haute a lieu au même moment. Les points amphidromiques sont des singularités de phase où l’amplitude de la marée s’annule. On retrouve ces réseaux de points amphidromiques dans le calcul des modes libres du modèle d’eau peu profonde en présence de rotation. En l’absence de continent, ces points sont situés exclusivement aux pôles.



4. L’essor de la physique des ondes topologiques

Le prix Nobel de physique a récompensé en 2016 trois chercheurs pour leurs découvertes des phases topologiques de la matière³. L’un d’entre eux, Thouless, a montré au début des années 80 que la réponse d’un gaz d’électrons bi-dimensionnel en présence d’un champ magnétique perpendiculaire est liée aux propriétés topologiques des fonctions d’ondes électroniques, décrites par un nombre de Chern [14]. Ces arguments ont donné une explication topologique pour l’observation de plateaux de la conductance extrêmement robustes dans des expériences de transport électronique. Ces propriétés topologiques ont ensuite été reliées à l’existence d’un flot spectral qui se manifeste par l’émergence d’états électroniques unidirectionnels piégés au

bord du matériau [8].

Ce domaine a connu un regain d’intérêt suite à la découverte en 2005 des isolants topologiques [7]. Ce sont des matériaux isolants en volume, mais conducteurs aux bords, même en l’absence de champ magnétique. Ces propriétés exotiques ont été expliquées par l’introduction d’un nouvel indice topologique, l’invariant \mathbb{Z}_2 de Kane et Mele. Ces idées ont peu à peu irriguées tous les domaines de la physique, notamment via la fabrication d’analogues classiques ou macroscopiques de modèles d’électrons quantiques sur des réseaux cristallins tels qu’on en trouve en matière condensée. Ces cristaux artificiels permettent de manipuler des ondes unidirectionnelles, piégées au bord d’un échantillon, en changeant simplement l’agencement du réseau ou les couplages entre les différents sites. Les ondes observées sont qualifiées de topologiques,

3. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2016/summary/>

en référence aux invariants topologiques qui garantissent leur existence. Le cas des ondes équatoriales montre que ces ondes topologiques existent aussi dans la nature aux échelles planétaire ou astrophysique, sans réseau sous-jacent.

Symétries. Suite à la découverte d'un nouvel invariant topologique, les physiciens ont classé les systèmes physiques sous la forme d'une table périodique des isolants topologiques et de leurs analogues dans d'autres domaines de la physique. Cette classification prédit l'observation possible d'invariants topologiques dans un système donné en fonction des symétries discrètes de l'opérateur d'évolution et de la dimension spatiale du système. Dans le cas des ondes équatoriales, c'est la symétrie par renversement du temps qui est en jeu : les équations d'eau peu profonde sont invariantes par la transformation $(t, u, v, f) \rightarrow -(t, u, v, f)$. Fixer la valeur du paramètre de Coriolis f brise l'invariance par renversement du temps. L'existence d'un premier nombre de Chern non nul est alors possible en deux dimensions, d'après la table périodique des isolants topologiques. La force de Coriolis est donc l'ingrédient essentiel pour l'apparition de propriétés non-triviales dans les ondes du plan f : elle permet d'une part l'ouverture d'une bande de fréquence interdite entre modes géostrophiques et modes de Poincaré, et d'autre part l'enroulement des vecteurs propres (propriété de fibré) des ondes de Poincaré.

La brisure du renversement du temps induite par la force de Coriolis se manifeste aussi de manière remarquable dans la structure spatiale des modes propres du modèle d'eau peu profonde. En l'absence de rotation, les modes propres sont des champs réels bi-dimensionnels. La hauteur η d'un mode propre est donc une fonction réelle de deux variables réelles (x, y) . De manière générique, son amplitude s'annule sur des lignes (modes de seiches). En présence de rotation, les modes propres du modèle deviennent des champs imaginaires (on obtient un champ fluide réel en sommant deux modes imaginaires conjugués). La hauteur η est alors une fonction de deux variables réelles à valeurs complexes. De manière générique, son amplitude s'annule en des points, à l'intersection entre les lignes où la partie réelle et de la partie imaginaire sont nulles [1]. Ce sont les points amphidromiques que l'on retrouve sur les cartes de marées (figure 7). Il y a donc deux conséquences « topologiques » de la brisure du renversement du temps dans le modèle d'eau peu profonde : l'apparition des points amphi-

dromiques et la propagation d'état unidirectionnels le long de l'équateur.

La correspondance bord-volume. Dans le problème de Matsuno, les états qui transitent d'une bande à l'autre sont aussi les états les plus localisés à l'équateur ; ils correspondent aux polynômes d'Hermite de degré le plus bas. On peut montrer que ces modes restent (exponentiellement) localisés le long de l'équateur dans le cas d'une interface abrupte entre un hémisphère nord $f > 0$ et un hémisphère sud $f < 0$, alors que les autres modes du problème deviennent tous délocalisés. En matière condensée, l'apparition d'états unidirectionnels localisés à l'interface entre deux matériaux ayant des propriétés topologiques différentes est expliquée par le principe de la correspondance bord-volume. L'idée est de considérer indépendamment les matériaux de part et d'autre de l'interface, et d'assigner un indice topologique à chaque bande de ces matériaux, supposés d'extension infinie (le volume). La correspondance bord-volume reflète l'impossibilité de passer continûment d'une bande à une autre de part et d'autre de l'interface si leur indice topologique est différent. En matière condensée, on présente souvent l'émergence d'états de bords localisés à l'interface entre deux matériaux topologiquement distincts comme un problème d'inversion de bande : dans le cas d'un système à deux bandes caractérisées par des indices topologiques opposés de part et d'autre de l'interface, il est nécessaire de fermer l'espace interbande pour continûment déformer les modes propres de la bande supérieure en modes propres de la bande inférieure lors du passage de l'interface. Fermer l'espace interbande revient alors à permettre la propagation d'états qui sont nécessairement évanescents dans la direction normale à l'interface. Plus précisément, la correspondance bord-volume prédit le flot spectral porté par des états localisés à l'interface, à partir des indices topologiques des matériaux pris isolément.

Il existe des démonstrations rigoureuses de cette correspondance dans le cas où les matériaux sont modélisés par un réseau discret. Les nombres d'ondes du système sont alors définis sur un tore (la zone de Brillouin), qui reflète dans l'espace réciproque la périodicité du cristal dans l'espace réel. Ce tore de Brillouin est un espace de base « naturel » pour définir un fibré associé à chaque bande d'onde d'un matériau donné. Une telle construction n'est pas immédiate dans le cas des ondes équatoriales : on ne peut pas assigner un triplet d'indices topo-

logiques à chaque hémisphère car il n'y a pas de réseau sous-jacent. La généralisation de la correspondance bord-volume à cette classe de systèmes continus est un sujet de recherche actif. Dans le contexte géophysique, il s'agit d'un problème important pour la compréhension de l'émergence d'états unidirectionnels en présence de bords. Un exemple frappant est donné par les ondes de Kelvin côtières, qui se propagent autour des bassins océaniques fermés ou des grands lacs dans une gamme de fréquence intermédiaire entre celle des modes géostrophiques et des modes de Poincaré.

Systèmes analogues. La table périodique des isolants topologiques montre la possibilité de trouver de nouveaux invariants associés à la brisure d'autres symétries que l'inversion par renversement du temps. Or il existe toute une hiérarchie de modèles fluides géophysiques, où différentes symétries discrètes sont brisées. Certains de ces modèles fourniront probablement d'autres illustrations de phénomènes topologiques. Par exemple, la gravité brise la symétrie miroir dans la direction verticale, et ouvre une bande de fréquence interdite dans les fluides stratifiés compressibles, et l'on observe pour certains profils de stratification en densité des flots spectraux qui connectent les différentes bandes du problème [11].

Outre l'intérêt d'avoir un cadre général pour comprendre la structure des excitations de faible amplitude dans des domaines très différents de la physique, la topologie a mis en évidence des

analogies parfois inattendues entre ses domaines. Jusqu'à maintenant, ces analogies ont pour la plupart été cantonnées à la dynamique linéaire. Lors de l'étude des propriétés de conduction d'un matériau, cela revient à négliger les termes d'interaction entre électrons. En dynamique des fluides géophysiques, les non-linéarités proviennent des termes d'advection. Dans le contexte équatorial, ces termes d'advection sont essentiels pour expliquer la dynamique chaotique du phénomène El Niño ou les renversements périodiques quasi-biennaux des vents de la haute atmosphère. Peut-être pourra-t-on un jour utiliser les analogies fournies par la topologie pour simuler certains de ces phénomènes dans des systèmes électroniques, ou proposer des modèles de fluides électroniques inspirés par la géophysique.

5. Épilogue

La légende dit que Matsuno et Yanai partageaient le même bureau, sans savoir que l'un observait les ondes que l'autre était en train de calculer. À l'époque de Matsuno, le théorème d'Atiyah-Singer était déjà connu des mathématiciens, mais il a fallu attendre plusieurs décennies pour que ces idées soient appliquées à des problèmes physiques, avec une véritable explosion au cours des dernières années, des molécules aux ondes sonores. Les ondes équatoriales illustrent ainsi l'intérêt de naviguer entre deux hémisphères, l'un géophysique, l'autre mathématique.

Références

- [1] M. V. BERRY. « The Bakerian lecture, 1987. Quantum chaology ». *Proc. R. Soc. Lond. A* **413**, n° 1844 (1987), p. 183-198.
- [2] B. BRADLYN et al. « Beyond Dirac and Weyl fermions : Unconventional quasiparticles in conventional crystals ». *Science* **353**, n° 6299 (2016), aaf5037.
- [3] P. DELPLACE, J. MARSTON et A. VENAILLE. « Topological origin of equatorial waves ». *Science* (2017), eaan8819.
- [4] F. FAURE. « Manifestation of the topological index formula in quantum waves and geophysical waves ». *arXiv preprint arXiv :1901.10592* (2019).
- [5] F. FAURE et B. ZHILINSKII. « Topological Chern indices in molecular spectra ». *Physical review letters* **85**, n° 5 (2000), p. 960.
- [6] F. FAURE et B. ZHILINSKII. « Topological properties of the Born–Oppenheimer approximation and implications for the exact spectrum ». *Letters in Mathematical Physics* **55**, n° 3 (2001), p. 219-238.
- [7] M. FRUCHART et D. CARPENTIER. « An introduction to topological insulators ». *Comptes Rendus Physique* **14**, n° 9-10 (2013), p. 779-815.
- [8] Y. HATSUGAI. « Chern number and edge states in the integer quantum Hall effect ». *Physical review letters* **71**, n° 22 (1993), p. 3697.
- [9] P. S. MARQUIS DE LAPLACE. *Traité de mécanique céleste*. 1. Crapelet, 1799.
- [10] T. MATSUNO. « Quasi-geostrophic motions in the equatorial area ». *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II* **44**, n° 1 (1966), p. 25-43.

- [11] M. PERROT, P. DELPLACE et A. VENAILLE. « Topological transition in stratified atmospheres ». *Nature Physics (In Press)* (2019).
- [12] S. RAGHU et F. D. M. HALDANE. « Analogs of quantum-Hall-effect edge states in photonic crystals ». *Physical Review A* **78**, n° 3 (2008), p. 033834.
- [13] W. THOMSON. « 1. On gravitational oscillations of rotating water ». *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **10** (1880), p. 92-100.
- [14] D. J. THOULESS et al. « Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential ». *Physical Review Letters* **49**, n° 6 (1982), p. 405.
- [15] G. E. VOLOVIK. *The universe in a helium droplet*. **117**. Oxford University Press on Demand, 2003.



Pierre DELPLACE

Université Claude Bernard, Lyon
pierre.delplace@ens-lyon.fr

Pierre Delplace est chercheur CNRS en physique théorique au laboratoire de physique à l'ENS de Lyon. Il s'intéresse aux propriétés topologiques de différents types d'ondes : des fonctions d'ondes quantiques électroniques dans les matériaux aux ondes classiques en électromagnétisme ou en dynamique des fluides.



Antoine VENAILLE

Université Claude Bernard, Lyon
antoine.venaille@ens-lyon.fr

Antoine Venaille est chercheur CNRS au laboratoire de physique à l'ENS de Lyon. Son travail porte sur la dynamique des fluides géophysiques. Il utilise les outils de physique statistique et nonlinéaire – et, plus récemment, la topologie.

Nous remercions chaleureusement [Thierry Dauxois](#), [Frédéric Faure](#) et [Pierre Py](#) pour la relecture de cet article.