Magistère d'Informatique et Modélisation

Exercices de fonctionnel : *Fonctions partielles recursives*

Printemps 2001

Exercice 1 : codage des entiers

1. On definit :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{T} & \equiv & \mathbf{K} \\ \mathbf{F} & \equiv & \mathbf{KI} \\ [M,N] & \equiv & \lambda z.zMN \end{array}$$

   Définissez l'itéré $[M_0, ..., M_n]$.

2. On definit les entiers standards par

$$\begin{array}{rcl} \ulcorner 0 \urcorner & \equiv & \mathbf{I} \\ \ulcorner n+1 \urcorner & \equiv & [F, \ulcorner n \urcorner] \end{array}$$

   Écrivez $\ulcorner 1 \urcorner$, $\ulcorner 2 \urcorner$, $\ulcorner 3 \urcorner$,.

3. Définissez $\mathbf{S}^+$ (successeur), $\mathbf{P}^-$ (prédécesseur), **Zero** (prédicat zéro),**Add** (addition).

4. Sachant que les c_n sont les entiers de Church, définissez les termes

$$\begin{array}{rcl} H\ulcorner n \urcorner & = & c_n \\ H^{-1}c_n & = & \ulcorner n \urcorner \end{array}$$

5. Un *système numéral* $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est un système dans lequel il y a un λ-terme S_d^+ et un λ-terme $Zero_d$ tels que

$$\begin{array}{rcl} S_d^+ D_n & = & d_{n+1} \\ Zero_d d_0 & = & \mathbf{T} \\ Zero_d d_{n+1} & = & \mathbf{F} \end{array}$$

   Un système numéral est *normal* si tous les d_n ont une forme normale.
   Soit $\mathbf{d}$ un système numéral $\phi : \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ est λ *définissable dans* $\mathbf{d}$ si

$$(\exists F \in \Lambda)(\forall n_1, ..., n_p \in \mathbb{N}) F d_{n_1} ... d_{n_p} = d_{\phi(n_1,...,n_p)}.$$

   Montrez que l'addition est λ-définissable.
   $\mathbf{d}$ est *adéquat* si et seulement si toutes les fonctions récursives sont λ-définissables dans $\mathbf{d}$.