Magistère d'Informatique et Modélisation

Exercices de fonctionnel : *Typage des termes nomalisables*

Printemps 2001

Exercice 2 :

On se place dans le système de types avec intersection.

1. Montrez que si Γ est un contexte et si $x_1, ...x_k$ sont des variables non déclarées dans Γ, si $\Gamma, x_1 : \tau_1, ..., x_k : \tau_k \vdash M : \sigma$ et si $\Gamma \vdash N_i : \tau_i$ pour tout $i \in [1..k]$ tel que x_i soit libre dans M, alors
$$\Gamma \vdash M[x_1 := N_1, ..., x_k := N_k] : \sigma.$$
2. Un type est *premier* si il n'est Ω ni une conjonction. Tout type σ est une conjonction de types premiers et de Ω. Ces types sont les *facteurs premiers* de σ.

   Supposons que $\Gamma \vdash M : \sigma$ pour un type premier σ. Montrez que
   (a) si M est une variable x alors x est déclarée de type σ' dans Γ et σ est un facteur premier de σ'.
   (b) Si $M \equiv \lambda x.P$ alors $\sigma = \tau \to \theta$ et $\Gamma, x : \tau \vdash P : \theta$.
   (c) Si $M \equiv PQ$ alors $\Gamma \vdash Q : \tau$ et $\Gamma \vdash Q : \tau \to \sigma'$ avec σ' facteur premier de σ
3. Montrez que si Γ est un contexte et si $x_1, ..., x_k$ sont des variables non déclarées dans Γ, si $\Gamma \vdash M[x_1 := N_1, ..., x_k := N_k] : \sigma$ et si N_1,...,N_k sont typables dans le contexte Γ, alors il existe des types τ_1,...,τ_k tels que $\Gamma \vdash N_i : \tau_i$ et $\Gamma, x_1 : \tau_1, ..., x_k : \tau_k \vdash M : \sigma$.
4. En conclure que si $\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$ et si N est typable dans le contexte Γ alors $\Gamma \vdash (\lambda x.M)N : \sigma$.
5. Montrez que si M est fortement normalisable alors M est typable (avec intersection).

Exercice 3

Les termes avec indices de de Bruijn forment l'ensemble Λb et ont la syntaxe suivante :

$$\begin{array}{lcl} M, N & ::= & n \mid \lambda M \mid M\ N \\ n & ::= & 0 \mid n+1 \end{array}$$

1. Définissez deux fonctions de Λ vers Λb et réciproquement qui font passer de la notation classique avec noms de variable à la notation avec indices de de Bruijn et vice-versa.
2. Définissez précisément la β-réduction dans Λb. Écrivez en particulier les fonctions de renommage des indices dont on a besoin.
3. Même chose pour la η-expansion.

Exercice 4

On considère la règle de typage pour les termes avec points fixes.

$$\frac{f : U \vdash M : U}{\vdash \mathsf{Fix} f.M : U}$$

1. Typez $\mathsf{Fix} f.\lambda x.(\lambda ab.a(f\lambda x.x)(f\lambda xy.x))$.
2. Typez $\mathsf{Fix} f.\lambda xy.(f(fy\lambda xy.x)f)$.