Magistère d'Informatique et Modélisation

Devoir de Fondement

novembre 1997

Soit $F_0 = \{0\}, F_2 = \{\cdot\}, F_n = \emptyset$, pour $n = 1$ et $n \geq 3$, une signature. On définit un ordre sur $T(F)$ par

$s < t$ si

- $s \equiv 0$ et $t \not\equiv 0$,
- ou $s \equiv s_1 \cdot s_2$ et $t \equiv t_1 \cdot t_2$ et
  - $s_1 < t_1$ et $s_2 < t$,
  - ou $s_1 = t_1$ et $s_2 < t_2$,
  - ou $s \leq t_2$.

Une suite strictement décroissante $(s^i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une suite telle que pour tout i $s^{i+1} < s^i$. Une suite croissante $(s^i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une suite telle que pour tout i, $s^{i+1} \geq s^i$.

Partie I

1. Montrer que $<$ est totale.
2. Montrer que l'ordre $\lhd \times \lhd \times \lhd$ (où $\lhd$ est l'ordre sous-terme et ou $\times$ représente le produit lexicographique d'ordres) est bien-fondé.
3. Par induction noethérienne sur l'ordre $\lhd \times \lhd \times \lhd$, montrer la propriété *«Pour tous $s \in T(F)$, $t \in T(F)$ et $u \in T(F)$, $s < t$ et $t < u$ implique $s < u$»*. En conclure que $<$ est transitive.
4. Montrer que $s \lhd t$ implique $s < t$.

Partie I

On veut monter que $<$ est bien fondé. Pour cela, on va raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe une suite strictement décroissante minimale et aboutir à une contradiction. La minimalité de la suite $(s^i)_{i \in \mathbf{N}}$ est prise dans le sens suivant. s^0 est le plus petit terme pour l'ordre sous-terme des termes qui commencent une suite infinie décroissante. s_{n+1} est le plus petit terme qui se situe à la position $n+1$ d'une suite infinie strictement décroissante qui commence par $s^0, ..., s^n$.

1. Montrer que pour tout i, $s^i \not\equiv 0$. On écrit donc les termes $s^i = s_1^i \cdot s_2^i$.
2. Montrer que l'ensemble $\{s_1^i \mid i \in \mathbf{N}\} \cup \{s_2^i \mid i \in \mathbf{N}\}$ ne permet pas de construire des suites infinies strictement décroissantes.
3. Si $A \subseteq T(F)$ ne contient aucune suite infinie strictement décroissante, alors de tout suite on peut extraire une suite infinie croissante. *Indication :* Supposant qu'il n'y pas de suite infinie croissante, montrer qu'il y a une infinité de suites croissantes finies et maximales (pour la longueur). En examinant les derniers éléments de ces suites, montrer qu'il y a une contradiction.
4. Montrer que de $(s_1^i)_{i \in \mathbf{N}}$ on peut extraire une suite infinie croissante $(s_1^{f(k)})_{k \in \mathbf{N}}$.
5. Montrer que de $(s_2^{f(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ on peut extraire une suite infinie croissante $(s_2^{g(f(k))})_{k \in \mathbf{N}}$.
6. Montrer que la suite $(s^{g(f(k))})_{k \in \mathbf{N}}$ est croissante.
7. Conclure.