Magistère d'Informatique et Modélisation

Exercices du module *Fondements*

20 novembre 1997

Exercice 1

Soient $\mathbf{A} = (A, F_{\mathbf{A}})$ une algèbre et B un ensemble. Munissez l'ensemble A^B des applications de B vers A d'un structure d'algèbre $\mathbf{A}^B$. Définissez des morphimes de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{A}^B$.

Exercice 2

Soient la signature

$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \quad \text{où } F_1 = \{p_1, p_2\}, F_2 = \{c\}, F_n = \emptyset \text{ pour } n = 0 \text{ ou } n \geq 3,$$

et les équations

$$\begin{aligned} p_1(c(x,y)) &= x \\ p_2(c(x,y)) &= y \\ c(p_1(x), p_2(x)) &= x. \end{aligned}$$

Les modèles de cette théorie s'appellent algèbres de Cantor. Montrez que les algèbres de Cantor non triviales ont un support infini.

Exercice 3

Donnez les arbres de preuve correspondant aux déductions suivantes.

1. $\{x \cdot 1 = x; i(x) \cdot (x \cdot y) = y\} \vdash i(1) = 1.$
2. $\{1 \cdot x = x; i(x) \cdot x; (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\} \vdash x \cdot 1 = x.$

Exercice 4

Soit $F_0 = \{0\}, F_1 = \{s\}, F_2 = \{+\}, F_n = \emptyset$, pour $n \geq 3$, une signature et $\mathsf{N} = \{0 + x = x \ ; \ s(x) + y = s(x + y)\}$ un ensemble d'identités. Montrez que les classes de congruence module N contiennent toutes un terme de la forme $s^n(0)$.

Exercice 5

Soient s un terme linéaire et $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, ..., x_n \mapsto t_n\}$, une substitution telle que les t_i $(1 \leq i \leq n)$ soient tous linéaires.

1. A-t-on $\sigma(s)$ linéaire ? Si oui, prouvez-le, sinon donnez un contre-exemple et une condition sur σ pour que cela soit vraie.
2. Une substitution qui transforme tout terme linéaire en un terme linéaire est dite *linéaire*. Montrez que la composition de deux substitutions linéaires est linéaire.

Exercice 6

Les algèbres de signature $F_0 = \{e\}, F_1 = V, F_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$ sont dites algèbres monadiques sur V.

1. Décrivez l'algèbre monadique initiale.
2. Montrez que les automates finis sur V sont des algèbres monadiques de support fini.
3. Soit $\mathbf{A} = \{A, \{e_{\mathbf{A}}\} \cup V_{\mathbf{A}}\}$ une algèbre monadique. Munissez d'une structure de monoïde l'ensemble $\{t_{\mathbf{A}} \mid t \in T(e \cup V, \{x\})\}$.
4. Définissez l'unique morphisme de monoïde de V^* vers ce monoïde qui prolonge l'application qui à chaque $a \in V$, associe $a_{\mathbf{A}}(x)$.
5. Montrez qu'un langage L est régulier (rationnel) si et seulement si il existe un morphisme de monoïde ϕ de V^* vers $\mathbf{M} = (M, \{e_{\mathbf{M}}, \cdot_{\mathbf{M}}\})$ (M fini) et un sous-ensemble M' de M tels que $L = \phi^{-1}(M')$.

Exercice 7

Soit une signature $F_0 = \{S, K\}, F_2 = \{\cdot\}, F_n = \emptyset$, pour $n = 1$ et $n \geq 3$. On considère l'ensemble d'identités

$$SK = \{(K \cdot x) \cdot y = x \ ; \ ((S \cdot x) \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot (y \cdot y)\}$$

. Trouvez des termes de $T(F)$, I, K', B et C tels que

- $SK \vdash (I \cdot x) = x$,
- $SK \vdash (K' \cdot x) \cdot y = y$,
- $SK \vdash ((B \cdot x) \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
- $SK \vdash ((C \cdot x) \cdot y) \cdot z = (x \cdot z) \cdot y$.