Magistère d'Informatique et Modélisation

Examen final du module Fondement
Partie : *Systèmes formels*

12 janvier 1998

Documents autorisés : notes de cours.

Exercice 1

Soit $F_0 = \{\Box\}, F_2 = \{\cdot\}, F_n = \emptyset$, pour $n = 1$ et $n \geq 3$, une signature. On définit un ordre sur $T(F)$ par

$s < t$ si

- $s \equiv \Box$ et $t \not\equiv \Box$,
- ou $s \equiv s_1 \cdot s_2$ et $t \equiv t_1 \cdot t_2$ et
  (1) $s_1 < t_1$ et $s_2 < t$,
  ou (2) $s_1 = t_1$ et $s_2 < t_2$,
  ou (3) $s \leq t_2$.

On admet que $<$ est transitif, total et bien fondé. On définit la fonction f par $f(\Box) = \Box \cdot \Box$ et $f(s_1 \cdot s_2) = f(s_1) \cdot f(s_2)$.

1. Montrez que si $s \not\equiv \Box$ alors $\Box \cdot \Box < f(s)$.
2. Montrez que f est strictement croissante.
3. f a-t-elle un point fixe ? A-t-elle un plus petit point fixe ? Justifiez vos réponses.

Exercice 2

Un terme $M \in \Lambda$ tel que pour tout $F \in \Lambda$, on ait $M\,F =_\beta F(M\,F)$ est appelé un *combinateur de point fixe*.

1. Soit $A \equiv \lambda xy \cdot y(xxy)$ et $\Theta \equiv AA$. Soit F un terme quelconque. Montrez que $\Theta F \xrightarrow[\beta]{} F(\Theta F)$.
2. Soit $\mathbf{Y} \equiv f \cdot (\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx))$ et $G \equiv \lambda yf \cdot f(yf)$. Quelle est la relation qui lie $\mathbf{Y}$, G et Θ ?

3. Étant donnés deux termes M et N et x une variable, montrez que $xM \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$ implique qu'il existe N' tel que $N =_\beta xN'$.
4. Montrez que si M est un combinateur de point fixe et x une variable quelconque, alors il existe P tel que $Mx \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} xP$.
5. Montrez que si M est un combinateur de point fixe, il existe Q tel que $M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda y \cdot Q$.
6. Montrez que si M est un combinateur de point fixe, $\lambda x \cdot Mx \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda y \cdot Q$.
7. Conclure que si M est un combinateur de point fixe, $\lambda x \cdot Mx =_\beta M$.
8. Montrez que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
   (i) M est un combinateur de point fixe,
   (ii) $M =_\beta GM$.
   (iii) M est un point fixe de G.
9. Construisez une suite infinie $(\mathbf{Y}^i)_{i \in \mathbb{N}}$ de combinateurs points fixes. *(Cette question peut-être résolue en admettant la précédente).*
10. Que dire des termes $\mathbf{Y}^0$, $\mathbf{Y}^1$ et $\mathbf{Y}^2$ et de leurs formes normales ?