# *Introduction au lambda-calcul*

*version du 21 novembre 2000 – 15 h 13*

# Les fonctions comme citoyens de première classe

On peut faire que les preuves soient citoyens de première classe,

mais pourquoi pas les fonctions ?

# Quelques dates

**autour de 1870** un Italien[a] s'oppose à Cantor sur le point de savoir quel est le concept de base des mathématiques prétendant que ça devrait être les fonctions.

**1920** *Schönfinkel* initie la logique combinatoire,

**1925** *Haskell Curry* crée la logique combinatoire,

**1936** *Alonso Church* crée le $\lambda$-calcul,

**1970-...** Explosion du $\lambda$-calcul dûe à l'informatique (Barendregt, Berry, Boehm, de Bruijn, Girard, Hindley, Klop, Krivine, Levy, Plotkin, Scott, mais aussi Curien, Statmann etc.)

[a] dont j'ai oublié le nom.

# Des notations différentes, un même concept

| | | |
|---|---|---|
| en maths | $x \mapsto x$ | $f \mapsto (x \mapsto f(f(x)))$ |
| en CAML | `fun x -> x` | `fun f -> (fun x -> (f (f x)))` |
| en $\lambda$-calcul | $\lambda x.x$ | $\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))$ |

# La syntaxe

La classe $\Lambda$ est la plus petite classe qui contient

1. $x$ si $x$ est une variable,
2. $\lambda x.M$ si $M \in \Lambda$,
3. $(M\,N)$ si $M \in \Lambda$ et $N \in \Lambda$.

# La syntaxe

La classe $\Lambda$ est la plus petite classe qui contient

1. $x$ si $x$ est une variable,
2. $\lambda x.M$ si $M \in \Lambda$, abstraction
3. $(M\,N)$ si $M \in \Lambda$ et $N \in \Lambda$. application

## Qu'y a-t-il derrière la syntaxe ?

On peut voir les termes comme des abstractions des fonctions ou des programmes fonctionnels.

Dans $\lambda x.M$, on dit que $M$ est le corps de la fonction ou du programme.

Dans $(M\,N)$, on peut voir $M$ comme une fonction que l'on applique au paramètre $N$. La valeur va s'obtenir par «réduction» (approche intentionnelle).

Le lambda-calcul décrit les fonctions par leur comportement.

## L'anecdote derrière la syntaxe ?

Au début Church voulait écrire $\hat{\mathtt{x}}$.

Mais au temps des machines à écrire on ne savait écrire que $\hat{}\,\mathtt{x}$.

Ce qui a donné $\Lambda\mathtt{x}$, puis $\lambda\mathtt{x}$.

## Exemples de termes

$I \equiv \lambda x.x$

$K \equiv \lambda xy.x$

$S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$

$B \equiv \lambda xyz.x(yz)$

## Exemples de termes

| | |
|---|---|
| $I \equiv \lambda x.x$ | $I$ est la fonction identité |
| $K \equiv \lambda xy.x$ | $Kc$ est la fonction constante $c$ |
| $S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$ | $Sabc$ distribue $c$ |
| $B \equiv \lambda xyz.x(yz)$ | $B$ permute l'effet des parenthèses |

# *Variables et substitutions*

# Les variables liées

$$
\begin{aligned}
BV(x) &= \emptyset \\
BV(\lambda x.M) &= BV(M) \cup \{x\} \\
BV(MN) &= BV(M) \cup BV(N)
\end{aligned}
$$

# Les variables liées

$$
\begin{aligned}
BV(x) &= \emptyset \\
BV(\lambda x.M) &= BV(M) \cup \{x\} \\
BV(MN) &= BV(M) \cup BV(N)
\end{aligned}
$$

**exemples**

$$
\begin{aligned}
BV(\lambda x.x) &= \{x\} \\
BV(\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))) &= \{f, x\} \\
BV(\lambda f.(\lambda x.(f(fxy)y))) &= \{f, x\}
\end{aligned}
$$

# Les variables libres

$$
\begin{aligned}
FV(x) &= \{x\} \\
FV(\lambda x.M) &= FV(M) - \{x\} \\
FV(MN) &= FV(M) \cup FV(N)
\end{aligned}
$$

# Les variables libres

$$
\begin{aligned}
FV(x) &= \{x\} \\
FV(\lambda x.M) &= FV(M) - \{x\} \\
FV(MN) &= FV(M) \cup FV(N)
\end{aligned}
$$

**exemples**

$$
\begin{aligned}
FV(\lambda x.x) &= \emptyset \\
FV(\lambda f.(\lambda x.(f(fx)))) &= \emptyset \\
FV(\lambda f.(\lambda x.(f(fxy)y))) &= \{y\} \\
FV(\lambda x.(f(fx))) &= \{f\}
\end{aligned}
$$

# Les variables libres (suite)

Un terme qui n'a pas de variable libre est dit clos ou fermé ou est appelé un combinateur.

## Les variables libres (suite)

Un terme qui n'a pas de variable libre est dit clos ou fermé ou est appelé un combinateur.

**ATTENTION !**

Une variable peut être à la fois libre et liée dans un terme.

Par exemple : $x(\lambda x.x)$.

## Convention

1. Au lieu de $\lambda x_1(...(\lambda x_n.M)...)$

   on écrit $\lambda x_1...x_n.M$.

   Par exemple : $\lambda f x.f(f x)$.

2. Au lieu de $(...(M\,N_1)...N_p)$

   on écrit $M\,N_1...N_p$ ou $M\,\vec{N}$, si $\vec{N} = (N_1...N_p)$.

   Par exemple : $\lambda x y g.g x y$.

$((\lambda x.x)y)y)$ donne $(\lambda x.x)yy$

## Le produit cartésien et la curryfication

Il n'y a pas de produit cartésien dans le $\lambda$-calcul simple.

Si on veut écrire :

$$\lambda(x, y).f(x, y)$$

on le remplace par

$$\lambda xy.f\,x\,y$$

C'est la curryfication (nommée après Haskell Curry).

# Substitution

Substituer une variable par un terme ne consiste pas simplement à remplacer toutes les occurrences de la variable par ce terme, à cause du phénomène de capture.

Quand on écrit $M[x := P]$ on ne remplace pas simplement les occurrences de $x$ dans $M$ par $P$.

## Substitution

Ainsi

$$\begin{aligned} x(\lambda x.x)[x := y] &\neq y(\lambda x.y) \\ (\lambda y.x)[x := y] &\neq \lambda x.x \end{aligned}$$

donc il faut être prudent.

# Substitution avec renommage

1. $x[x := P] = P$
2. $y[x := P] = y$
3. $(\lambda x.M)[x := P] = \lambda x.M$
4. $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda y.(M[x := P])$

   si $x \notin FV(M)$ ou $y \notin FV(P)$
5. $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda z.(M[y := z][x := P])$

   si $x \in FV(M)$ et $y \in FV(P)$

   et $z$ est une nouvelle variable
6. $(M_1 M_2)[x := P] = M_1[x := P]M_2[x := P]$

## La convention de Barendregt

C'est une convention sur les variables libres d'un terme dans un énoncé mathématique.

Il n'existe aucun sous-terme dans lequel une variable apparaît à la fois libre et liée.

# L'$\alpha$-conversion

$$\lambda x.N \equiv_\alpha \lambda y.(N[x := y]) \qquad y \notin FV(N)$$

$$\frac{M_1 \equiv_\alpha N_1 \qquad M_2 \equiv_\alpha N_2}{M_1 M_2 \equiv_\alpha N_1 N_2}$$

$$\frac{M \equiv_\alpha N}{\lambda z.M \equiv_\alpha \lambda z.N}$$

$$x \equiv_\alpha x$$

## L'$\alpha$-conversion

L'$\alpha$-conversion ne change pas la «signification» des termes.

## La convention de Barendregt

– On suppose que dans tout théorème que l'on énonce, on suit la convention de Barendregt.
– Si l'on a un terme qui ne satisfait pas la convention de Barendregt, on s'y ramène par $\alpha$-conversion

## Substitution et convention de Barendregt

Avec la convention de Barendregt, la définition des substitutions devient beaucoup plus simple.

- $x[x := P] = P$
- $y[x := P] = y$
- $(\lambda y.M)[x := P] = \lambda y.M[x := P]$
- $(M_1 M_2)[x := P] = M_1[x := P]M_2[x := P]$

# La $\beta$-réduction et les autres réductions

## La règle $\beta$

Les fonctions sont faites pour calculer !

Les réductions d'un terme représentent son calcul.

La $\beta$-réduction est l'étape élémentaire.

$$(\lambda x.M)P \xrightarrow[\beta]{} M[x := P]$$

## R-réduction

On se donne un ensemble $R$ de règles, c-à-d de paires de termes, par exemple $\beta$.

$M \xrightarrow[R]{} N$ signifie que $M$ se réduit à $N$ par $R$ en une étape.

# R-réduction

$$\text{(règle)}\ \frac{(M,N)\in R}{M \underset{R}{\longrightarrow} N} \qquad (\xi)\ \frac{M \underset{R}{\longrightarrow} N}{\lambda x M \underset{R}{\longrightarrow} \lambda x N}$$

$$\text{(congruence gauche)}\ \frac{M \underset{R}{\longrightarrow} N}{MP \underset{R}{\longrightarrow} NP} \qquad \text{(congruence droite)}\ \frac{M \underset{R}{\longrightarrow} N}{PM \underset{R}{\longrightarrow} PN}$$

## Exercice

Réduire

- $\lambda y.(\lambda x.x)z$
- $(\lambda f x.f(fx))(\lambda x.x)$
- $(\lambda f x.f(fx))(\lambda f x.fx)$

# D'autres exemples de réductions

La réduction $\eta$

Pour tout $M \in \Lambda$ et $x \notin FV(M)$,

$$\lambda x.Mx \quad \xrightarrow[\eta]{} \quad M.$$

L'expansion $\eta$

Pour tout $M \in \Lambda$ et $x \notin FV(M)$,

$$M \quad \xrightarrow[\eta_{exp}]{} \quad \lambda x.Mx.$$

# D'autres exemples de réductions

La réduction par $\beta$ et $\eta$

$$\xrightarrow[\beta\eta]{} \;=\; \xrightarrow[\beta]{} \;\cup\; \xrightarrow[\eta]{} \;.$$

# Fermeture transitive et réflexive

(cas de base) $\dfrac{M \xrightarrow[R]{} N}{M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N}$ (réflexivité) $M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow M$

(transitivité) $\dfrac{M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N \quad N \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow L}{M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow L}$

**Proposition** Congruence de $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$

$$\frac{M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N}{\lambda x.M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \lambda x.N}$$

$$\frac{M \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N \qquad P \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} Q}{MP \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} NQ}$$

Proposition | Congruence de $\underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow}$

Cas $\dfrac{M \underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} N}{\lambda x.M \underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} \lambda x.N}$

On doit montrer que

– sous l'hypothèse $M \underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} N$

– on a la conclusion $\lambda x.M \underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} \lambda x.N$.

La démonstration est par induction sur la taille de l'arbre de preuve de $M \underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} N$ (qui utilise les règles de la définition de $\underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow}$ et celle de $\underset{\beta}{\longrightarrow}$ ).

Proposition | Congruence de $\underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow}$

Trois cas se présentent :

1. $M \underset{\beta}{\longrightarrow} N$, on a utilisé le «cas de base», alors par $(\xi)$, $\lambda x.M \underset{\beta}{\longrightarrow} \lambda x.N$ et on conclut par le «cas de base».
2. $M \equiv N$, alors $\lambda x.M \equiv \lambda x.N$ et conclut par «réflexivité».
3. Il existe $P$ tel que $M \underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} P$ et $P \underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} N$. Par induction, on tire,
   - $\lambda x.M \underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} \lambda x.P$
   - et $\lambda x.P \underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} \lambda x.N$,

   et par «transitivité» $\lambda x.M \underset{\beta}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} \lambda x.N$.

# Fermeture transitive, réflexive et symétrique

Avec les règles

(cas de base) $\dfrac{M \xrightarrow[R]{} N}{M \xleftrightarrow[R]{} N}$ (réflexivité) $M \xleftrightarrow[R]{} M$

(transitivité) $\dfrac{M \xleftrightarrow[R]{} N \quad N \xleftrightarrow[R]{} L}{M \xleftrightarrow[R]{} L}$ (symétrie) $\dfrac{M \xleftrightarrow[R]{} N}{N \xleftrightarrow[R]{} M}$

on obtient la fermeture transitive, réflexive et symétrique

de $\xrightarrow[R]{}$ .

## Fermeture transitive, réflexive et symétrique

– Elle s'écrit $=_R$ ou $\overset{}{\underset{R}{\Longleftrightarrow}}$ ,

– elle se dit $R$-égal ou $R$-convertible ou $R$-équivalent .

# L'égalité extensionnelle

$\overset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ décrit l'égalité intentionnelle.

Autrement dit, si $M \overset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N$ si $M$ et $N$ ont le même «comportement».

Deux termes sont extensionnellement équivalents s'ils prennent les mêmes «valeurs» quand on les appliquent au même terme.

# L'égalité extensionnelle

On aussi la règle

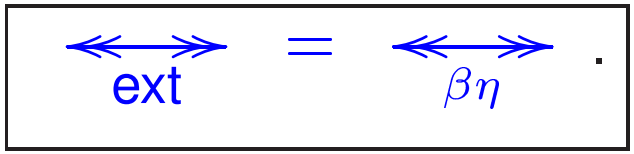
$$\text{(ext)} \quad \frac{Mx = Nx}{M = N} \qquad x \notin FV(MN)$$

# L'égalité extensionnelle

On aussi la règle

$$\text{(ext)} \quad \frac{Mx = Nx}{M = N} \qquad x \notin FV(MN)$$

Par les règles cas de base pour $\beta$ + réflexivité + transitivité + symétrie + ext on définit une relation $\underset{\text{ext}}{\Longleftrightarrow}$ .

Proposition 

Proposition $\boxed{\overset{}{\underset{\text{ext}}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}} = \overset{}{\underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}}}$ .

Pour montrer que $\overset{}{\underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}} \subseteq \overset{}{\underset{\text{ext}}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}}$

il suffit de montrer que si $P \underset{\eta}{\longrightarrow} Q$ alors $P \overset{}{\underset{\text{ext}}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}} Q$

donc il suffit de montrer que pour $x \notin FV(M)$

$(\lambda x.Mx) \overset{}{\underset{\text{ext}}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}} M$

En fait, il suffit de montrer qu'on a $(\lambda x.Mx)x \overset{}{\underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}} Mx$.

Par le *cas de base* et la définition de $\underset{\beta}{\longrightarrow}$ , cela vient de

$(\lambda x.Mx)x \underset{\beta}{\longrightarrow} (Mx)[x := x] \equiv Mx$.

Proposition $\boxed{\overset{}{\underset{\text{ext}}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}} = \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}}$ .

Pour montrer que $\underset{\text{ext}}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow} \subseteq \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}$ ,

il suffit de montrer que ext est une règle dérivée dans $\underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow}$ .

Supposons $Mx \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow} Nx$ avec $x \notin FV(MN)$,

alors $\lambda x.Mx \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow} \lambda x.Nx$ par $\xi$,

donc par $\eta$ appliquée deux fois, on a

$$M \underset{\eta}{\longleftarrow} \lambda x.Mx \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow} \lambda x.Nx \underset{\eta}{\longrightarrow} N$$

soit

$$M \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\!\twoheadrightarrow} N.$$

## Contexte

Un contexte $C[\,]$ est défini ainsi

1. $[\,]$ est un contexte,
2. si $M \in \Lambda$ et si $C[\,]$ est un contexte alors $MC[\,]$ et $C[\,]M$ sont des contextes,
3. si $C[\,]$ est un contexte alors $\lambda x.C[\,]$ est un contexte.

# Contexte

Définition Si $C[\,]$ est un contexte et $A \in \Lambda$

alors $C[A]$ est défini par induction sur $C[\,]$.

– $[A] = A$,
– si $C[\,] = \lambda x.D[\,]$ alors $C[A] = \lambda x.D[A]$,
– si $C[\,] = M\,D[\,]$ alors $C[A] = M\,D[A]$,
– etc.

## Stabilité par contexte

Proposition $\xrightarrow[R]{}$ , $\xrightarrow[R]{}$ et $\xleftrightarrow[R]{}$ sont stables par contexte ou compatibles.

$\xrightarrow[R]{}$ est stable par contexte.

Démonstration : $M \xrightarrow[R]{} N$ alors $C[M] \xrightarrow[R]{} C[N]$

Par induction sur la structure de $C[\,]$, sachant que $M \xrightarrow[R]{} N$.

1. $C[\,] = [\,]$ alors $C[M] = M$ et $C[N] = N$, évident.
2. $C[\,] = AD[\,]$,
   - par induction $D[M] \xrightarrow[R]{} D[N]$,
   - d'autre part, $C[M] = AD[M]$ et $C[N] = AD[N]$,
   - donc par congruence à droite $C[M] \xrightarrow[R]{} C[N]$.
3. $C[\,] = D[\,]A$, comme 2 en changeant «droite» en «gauche».
4. $C[\,] = \lambda x.D[\,]A$, par induction $D[M] \xrightarrow[R]{} D[N]$, d'où la conclusion par ($\xi$).

## Stabilité par substitution

Proposition

$M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N$ implique $A[x := M] \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow A[x := N]$.

## Stabilité par substitution

Proposition

$M \xrightarrow[R]{\twoheadrightarrow} N$ implique $A[x := M] \xrightarrow[R]{\twoheadrightarrow} A[x := N]$.

Démonstration : L'hypothèse est $M \xrightarrow[R]{\twoheadrightarrow} N$.

La démonstration se fait par induction sur $A$.

– $A \equiv x$, alors $A[x := M] \equiv M \xrightarrow[R]{\twoheadrightarrow} N \equiv A[x := N]$.

– $A \equiv y$, alors $A[x := M] \equiv y \xrightarrow[R]{\twoheadrightarrow} y \equiv A[x := N]$ par réflexivité.

## Stabilité par substitution (suite)

– $A \equiv \lambda y.B$,

par induction $B[x := M] \xrightarrow[R]{} B[x := N]$,

donc $A[x := M] \equiv \lambda y.B[x := M]$ et

$A[x := N] \equiv \lambda y.B[x := N]$,

par congruence de $\xrightarrow[R]{}$, on a

$\lambda y.B[x := M] \xrightarrow[R]{} \lambda y.B[x := N]$.

## Stabilité par substitution (suite)

– $A \equiv BB'$

par induction $B[x := M] \xrightarrow[R]{} B[x := N]$ et

$B'[x := M] \xrightarrow[R]{} B'[x := N]$,

par définition de la substitution

$A[x := M] \equiv B[x := M]B'[x := M]$ et

$A[x := N] \equiv B[x := N]B'[x := N]$,

par congruence de $\xrightarrow[R]{}$ on a

$A[x := M] \xrightarrow[R]{} A[x := N]$.

## Exercice

Montrez que ça ne peut pas marcher pour $\xrightarrow[R]{}$ ,

c-à-d qu'on n'a pas :

$M \xrightarrow[R]{} N$ implique $A[x := M] \xrightarrow[R]{} A[x := N]$.

## D'autres exemples de termes

$\omega \equiv \lambda x.xx$

$\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

$\mathsf{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$

$\mathsf{W}_F \equiv (\lambda x.F(xx))$

## Exercice

Montrez que $\Omega$ se réécrit vers un unique terme. Lequel ?

Plus précisément, montrez qu'il existe un terme unique $M \in \Lambda$ tel que $\Omega \xrightarrow[\beta]{} M$.

## Exercice

1. Montrez que $\mathsf{Y}F \xrightarrow[\beta]{} F(\mathsf{W}_F\mathsf{W}_F)$.
2. Montrez que $F(\mathsf{Y}F) \xrightarrow[\beta]{} F(\mathsf{W}_F\mathsf{W}_F)$.
3. Conclure que $\mathsf{Y}F \xleftrightarrow[\beta]{} F(\mathsf{Y}F)$.

## Redex et formes normales

- Un R-redex est un terme $M$ tel que $(M, N) \in R$.
- $N$ et le R-contracté de $M$.
- Un terme $M$ est R-irreductible si $M$ ne contient aucun R-redex.
- Un terme $N$ est une forme normale de $M$, si $N$ est R-irreductible et si $M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N$.

# Formes normales

On n'affirme

– ni l'existence (cf $\Omega$),

– ni l'unicité, il y a unicité pour $\beta$ et $\beta \cup \eta_{exp}$, mais il faut le prouver.

La forme normale si elle existe est la valeur intentionnelle.

## Exercice

Lesquels de ces termes sont des formes normales ?

$(\lambda x.x)$

$((\lambda xy.x)v)w$

$(\lambda xy.xv)w$

$\lambda xy.xvw$

## Entiers de Church

- $(\lambda f x.f(fx)) \equiv$ **2** correpond au nombre entier deux.
- $(\lambda f x.x) \equiv K$ correspond à zéro.
- $(\lambda f x.fx) \equiv$ **1** correspond à un.
- Plus généralement l'entier **n** est le terme $(\lambda f x.(f^n x))$.

## Exercice

1. Montrez que

$$\mathbf{1} \xrightarrow[\eta]{} I \equiv \lambda x.x.$$

2. Calculez
   - **12**,
   - **21**,
   - **22**,
3. A quoi correspond **mn** ?
4. Écrivez l'opération "successeur".