La logique propositionnelle (deduction naturelle)

version du 26 octobre 2000 – 08 h 53

En déduction naturelle, on raisonne avec des hypothèses.

Au lieu du jugement $\vdash p$, on utilise le jugement $\Gamma \vdash p$ où

- Γ est un ensemble de propositions qui sont les hypothèses ou antécédent.
- On écrit $\Gamma, p \vdash q$ au lieu de $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$

  et $\vdash p$ quand l'ensemble des hypothèses est vide.
- $\Gamma \vdash p$ se lit
  - "de Γ on déduit p"
  - ou "Γ infère p"
  - ou "sous les hypothèses Γ on a p".

Les théorèmes

Les théorèmes sont les jugements de la forme $\vdash p$ qui peuvent être déduits des axiomes et des règles.

On les trouvent donc à la racine d'un arbre de preuve.

La logique propositionnelle minimale

L'axiome

Il n'y a qu'un seul axiome,

$$\Gamma, p \vdash p$$

Les règles

Il y a deux règles : introduction et élimination :

$$\Rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \Rightarrow q}$$

$$\Rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \Rightarrow q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Preuve de K

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, q \vdash p}{p \vdash q \Rightarrow p}\Rightarrow E}{\vdash p \Rightarrow q \Rightarrow p}\Rightarrow E$$

Exercice

1. Prouver $Hilbert_S$.
2. Prouver $B : (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q$.

La logique propositionnelle

Les règles

Les règles sont deux types :

– règles d'introduction : un connecteur qui n'était pas présent apparaît dans la proposition conséquente sous la barre d'inférence.

– règles d'élimination : la proposition conséquente sous la barre d'inférence est construite en enlevant le connecteur principal d'un des connecteurs conséquents d'un jugement au dessus de la barre.

La syntaxe

Il y a trois nouveaux connecteurs $\bot$, $\&$ et $\vee$.

– $\bot$ est unaire et représente l'absurde,

– $\&$ et $\vee$ sont bien connus et représentent la conjonction et la disjonction.

L'axiome pour $\bot$

Il n'y a qu'une règle et c'est une règle d'élimination :

$$\bot\ E \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Les règles du $\&$

Il y a une règle d'introduction et deux règles d'élimination.

Les règles du $\&$

Il y a une règle d'introduction et deux règles d'élimination.

$$\&\, I \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \,\&\, q}$$

$$\&\, E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \,\&\, q}{\Gamma \vdash p}$$

$$\&\, E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \,\&\, q}{\Gamma \vdash q}$$

Les règles du $\vee$

Il y a deux règles d'introduction et une règle d'élimination.

Les règles du $\vee$

Il y a deux règles d'introduction et une règle d'élimination.

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q} \qquad\qquad \vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$