Magistère d'Informatique et Modélisation

Partiel de Logique

7 décembre 2000

Documents autorisés. Rédigez chaque partie sur une copie séparée

Exercice 1

Soit les deux termes $\mathbf{I} \equiv \lambda x.x$ et l'entier de Church $\mathbf{1}$ correspondant à 1.

1. Rappelez la forme de $\mathbf{1}$.
2. Montrez que $I \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} \mathbf{1}$
3. Considérons la conversion $\underset{\mathbf{I1}}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ obtenue en ajoutant à la β-conversion $\underset{\beta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ l'égalité $\mathbf{I} \underset{\mathbf{I1}}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} \mathbf{1}$. Donnez les règles d'inférence qui la définissent.
4. Montrez que $\underset{\mathbf{I1}}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} = \underset{\beta\eta}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$.

Exercice 2

On écrit $M \uparrow N$ si il existe L tel que $L \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} M$ et $L \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$.

1. Montrez que $(\lambda x.ax)b \uparrow (\lambda y.yb)a$.
2. Montrez que $(\lambda x.xc)c \uparrow (\lambda x.xx)c$.

Exercice 3

Donnez l'arbre de preuve en déduction naturelle de $p \vee (q \vee r) \Rightarrow (p \vee q) \vee r$.