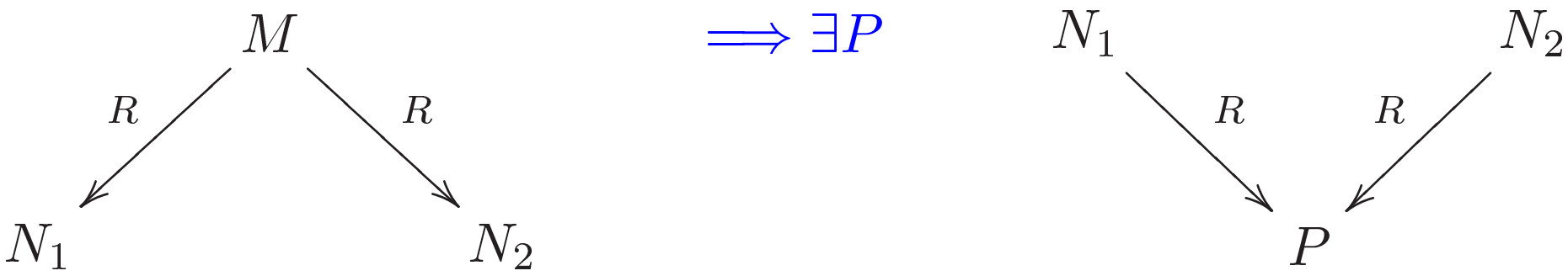
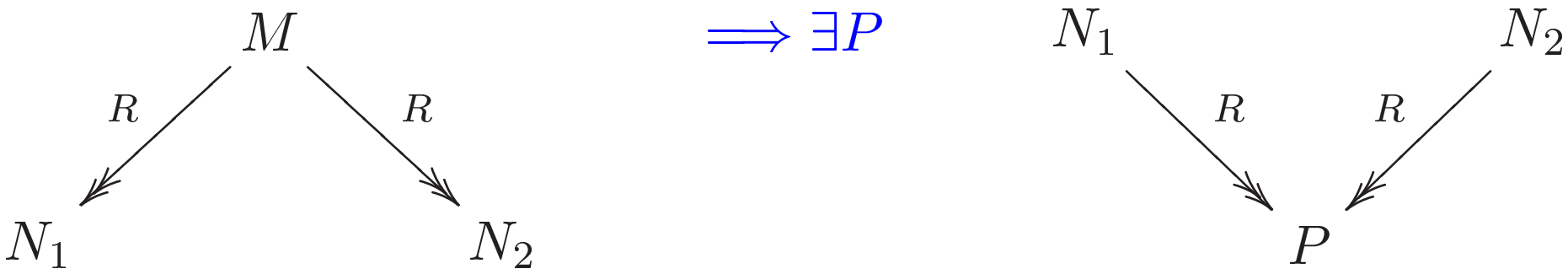
Confluence du lambda-calcul

version du 22 novembre 2001 – 12 h 09

Propriété du losange

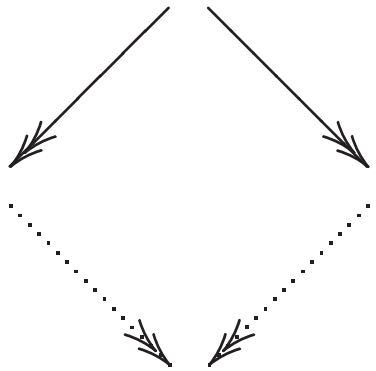


Confluence



Remarques

1. $\xrightarrow[R]{}$ est confluente si $\xrightarrow[R]{}$ a la propriété du losange.
2. Parfois on note la confluence :



où $\cdots\!\!\rightarrow$ est un flèche existentielle.

Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser) :

Si R est confluente alors

$$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \iff \exists P (M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).$$

Si R est confluente alors

$$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \iff \exists P(M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).$$

Démonstration : $\Longleftarrow$ est évident car $\underset{R}{\twoheadrightarrow} \subseteq \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ et $\underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ est symétrique et transitive.

Si R est confluente alors

$$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \iff \exists P(M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).$$

Démonstration : $\Longrightarrow$. Par induction sur le nombre de «pics» dans $M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N$. Soit

$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots$$

$$\ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

– si $n = 0$ alors $M \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ ou $M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N$.

Si R est confluente alors

$$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \iff \exists P(M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).$$

Démonstration : $\Longrightarrow$.

– si $n \neq 0$, par confluence, dans

$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \dots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

il existe M'_n tel que $N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} M'_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$

et

$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \dots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \dots$$

$$\dots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} M'_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

a un pic de moins, donc on a le résultat par induction.

Confluence et convertibilité

Corollaire : Si R est confluente

1. Si N est une forme normale de M alors $M \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow N$.
2. Un terme a au plus une forme normale.

Confluence de $\rightarrow_\beta$

Théorème :

$\xrightarrow[\beta]{}$ est confluent

Remarques préliminaires

– Si $\xrightarrow[R]{}$ a la propriété du losange, alors $\xrightarrow[R]{}$ a la propriété du losange.

– $\xrightarrow[\beta]{}$ n'a pas la propriété du losange. Pourquoi ?

– Il faut donc trouver une relation $\dashrightarrow$ telle que

- o $\dashrightarrow$ a la propriété du losange,
- o $\dashrightarrow = \xrightarrow[\beta]{}$,
  - + donc $\xrightarrow[\beta]{}$ a la propriété du losange,
  - + ce qui signifie que $\xrightarrow[\beta]{}$ est confluente.

Lemme de substitution

Si $x \notin FV(L)$ alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Si $x \notin FV(L)$ alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Démonstration : Par induction sur la structure de M.

M est une variable

– $M \equiv x$, les deux côtés valent $N[y := L]$,

– $M \equiv y$, les deux côtés valent L,

– $M \equiv z$, les deux côtés valent z,

Si $x \notin FV(L)$ alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Démonstration : Par induction sur la structure de M.

M est une abstraction $M \equiv \lambda z.M_1$.

$$\begin{aligned}
M[x := N][y := L] &\equiv (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] \\
&\equiv \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) \quad \text{(par définition)} \\
&\equiv \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) \quad \text{(par induction)} \\
&\equiv (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] \quad \text{(par définition)}
\end{aligned}$$

M est une application facile.

Définition de la réduction parallèle

(réflexivité) $$M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow M$$

(APP-congruence) $$\frac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow M' \quad N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow N'}{M\,N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow M'\,N'}$$

(ABS-congruence) $$\frac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow M'}{\lambda x.M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda x.M'}$$

(β-parallèle) $$\frac{M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow M' \quad N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow N'}{(\lambda x.M)\,N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow M'[x := N']}$$

Trois résultats

1. Si $M \xrightarrow[\beta]{} M'$ alors $M \twoheadrightarrow M'$

   c'est-à-dire $\xrightarrow[\beta]{} \subseteq \twoheadrightarrow$

2. Si $M \twoheadrightarrow M'$ alors $M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\twoheadrightarrow M'$

   c'est-à-dire $\twoheadrightarrow \subseteq \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\twoheadrightarrow$

3. Si $M \twoheadrightarrow M'$ et $N \twoheadrightarrow N'$ alors

   $$M[x := N] \twoheadrightarrow M'[x := N']$$

En exercice.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte due à M. Takahashi.

que la propriété du losange pour $\twoheadrightarrow$:

$$M \twoheadrightarrow N \Longrightarrow N \twoheadrightarrow M^* \qquad (*)$$

où M^* est un terme déterminé par M mais indépendant de N.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte

que la propriété du losange pour $\twoheadrightarrow$:

$$M \twoheadrightarrow N \Longrightarrow N \twoheadrightarrow M^* \qquad (*)$$

où M^* est un terme déterminé par M mais indépendant de N.

Intuitivement M^* est le terme obtenu à partir de M en contractant tous ses redex simultanément.

Le définition de M^*

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1 M_2)^* \equiv M_1^* M_2^*$ si $M_1 M_2$ n'est pas un redex.
4. $((\lambda x.M_1)M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

$$M \twoheadrightarrow N \Longrightarrow N \twoheadrightarrow M^*.$$

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition M^* sont laissés en exercice.

$$M \twoheadrightarrow N \Longrightarrow N \twoheadrightarrow M^*.$$

Si $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \twoheadrightarrow N$, alors deux cas pour N,

– $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$

– $N \equiv N_1[x := N_2]$

dans les deux cas, il y a des N_i (i=1 ou i=2) tels que $M_i \twoheadrightarrow N_i$.

Par induction, $N_i \twoheadrightarrow M_i^*$.

Pour chaque cas :

– Si $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$ alors $N \twoheadrightarrow M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$.

– Si $N \equiv N_1[x := N_2]$,alors nous avons

$N \twoheadrightarrow M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$, par le résultat 3.