La logique propositionnelle (deduction naturelle)

version du 17 octobre 2001 – 15 h 59

En déduction naturelle, on raisonne avec des hypothèses.

Au lieu du jugement $\vdash p$, on utilise le jugement $\Gamma \vdash p$ où

- Γ est un ensemble de propositions qui sont les hypothèses ou antécédent.
- On écrit $\Gamma, p \vdash q$ au lieu de $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$

  et $\vdash p$ quand l'ensemble des hypothèses est vide.
- $\Gamma \vdash p$ se lit
  - "de Γ on déduit p"
  - ou "Γ infère p"
  - ou "sous les hypothèses Γ on a p".

Les théorèmes

Les théorèmes sont les jugements de la forme $\vdash p$ qui peuvent être déduits des axiomes et des règles.

On les trouvent donc à la racine d'un arbre de preuve.

La logique propositionnelle minimale

L'axiome

Il n'y a qu'un seul axiome,

$$\Gamma, p \vdash p$$

Les règles

Il y a deux règles : introduction et élimination :

$$\Rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \Rightarrow q}$$

$$\Rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \Rightarrow q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Preuve de Hilbert_K

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash p}}{p \vdash q \Rightarrow p}\Rightarrow I}{\vdash p \Rightarrow q \Rightarrow p}\Rightarrow I$$

Exercice

1. Prouver $Hilbert_S$.
2. Prouver $B : (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q$.

La preuve de B

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash p \Rightarrow q \quad \mathcal{D}}{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash q}\Rightarrow E}{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p) \vdash r \Rightarrow q}}{(p \Rightarrow q) \vdash (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q}}{\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\dfrac{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash r \Rightarrow p \quad (p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash r}{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash p}\Rightarrow E$$

Des preuves à la Hilbert aux preuves en déduction naturelle

On remplace les invocations de Hilbert_K et Hilbert_S.

Les preuves sont plus longues, ainsi la preuve de $q \Rightarrow p \Rightarrow p$ est

$$\dfrac{\dfrac{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}{q \vdash p \Rightarrow p}}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}$$

Alors que la preuve déduite de la preuve à la Hilbert est

$$\dfrac{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p \qquad \dfrac{\mathcal{D} \qquad \vdash p \Rightarrow p \Rightarrow p}{\vdash p \Rightarrow p}}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\dfrac{\vdash (p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow p \Rightarrow p) \Rightarrow p \Rightarrow p \qquad \vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \Rightarrow p}{\vdash (p \Rightarrow p \Rightarrow p) \Rightarrow p \Rightarrow p}$$

Alors que la preuve déduite de la preuve à la Hilbert est

$$\dfrac{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p \qquad \dfrac{\mathcal{D} \qquad \vdash p \Rightarrow p \Rightarrow p}{\vdash p \Rightarrow p}}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\dfrac{\vdash (p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow p \Rightarrow p) \Rightarrow p \Rightarrow p \qquad \vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \Rightarrow p}{\vdash (p \Rightarrow p \Rightarrow p) \Rightarrow p \Rightarrow p}$$

que l'on prolonge par le preuves des feuilles.

La logique propositionnelle

Les règles

Les règles sont deux types :

– règles d'introduction : un connecteur qui n'était pas présent apparaît dans la proposition conséquente sous la barre d'inférence.

– règles d'élimination : la proposition conséquente sous la barre d'inférence est construite en enlevant le connecteur principal d'un des connecteurs conséquents d'un jugement au dessus de la barre.

La syntaxe

Il y a trois nouveaux connecteurs $\bot$, $\&$ et $\vee$.

– $\bot$ est unaire et représente l'absurde,

– $\&$ et $\vee$ sont bien connus et représentent la conjonction et la disjonction.

L'axiome pour $\bot$

Il n'y a qu'une règle et c'est une règle d'élimination :

$$\bot\ E \quad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}$$

Les règles du $\&$

Il y a une règle d'introduction et deux règles d'élimination.

Les règles du $\&$

Il y a une règle d'introduction et deux règles d'élimination.

$$\&\, I \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \,\&\, q}$$

$$\&\, E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \,\&\, q}{\Gamma \vdash p}$$

$$\&\, E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \,\&\, q}{\Gamma \vdash q}$$

Les règles du $\vee$

Il y a deux règles d'introduction et une règle d'élimination.

Les règles du $\vee$

Il y a deux règles d'introduction et une règle d'élimination.

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q} \qquad\qquad \vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$