Magistère d'Informatique et Modélisation

Corrigé de l'examen de logique

Janvier 2002

Exercice 1

1. Le terme $\lambda xy.xy$ a pour type $(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$ avec comme arbre de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:(\alpha\to\beta),y:\alpha\vdash x:(\alpha\to\beta) \qquad x:(\alpha\to\beta),y:\alpha\vdash y:\alpha}{x:(\alpha\to\beta),y:\alpha\vdash xy:\beta}\,App}{x:(\alpha\to\beta)\vdash \lambda y.xy:\alpha\to\beta}\,Abs}{\vdash \lambda xy.xy:(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\beta}\,Abs
$$

qui correspond donc à l'arbre de preuve :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\to\beta,\alpha\vdash\alpha\to\beta \qquad \alpha\to\beta,\alpha\vdash y:\alpha}{\alpha\to\beta,\alpha\vdash\beta}\Rightarrow E}{\alpha\to\beta\vdash\alpha\to\beta}\Rightarrow I}{\vdash(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\beta}\Rightarrow I
$$

2. $\lambda x.x$ a lui aussi pour type $(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$.
3. Il correspond à l'arbre de typage

$$
\dfrac{x:\alpha\to\beta\vdash x:\alpha\to\beta}{\vdash\lambda x.x:(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\beta}\,Abs
$$

Exercice 2

1. On a dans $\mathbb{Z}_2$,

$$v(\neg(\neg p \,\&\, \neg q)) = 1 + (1 + v(p)).(1 + v(q))$$

et

$$v(p \vee q) = v(p) + v(q) + v(p).v(q).$$

Or

$$1+(1+v(p)).(1+v(q)) = 1+1+v(p)+v(q)+v(p).v(q) = v(p)+v(q)+v(p).v(q).$$

Donc

$$v(\neg(\neg p \,\&\, \neg q) \Rightarrow (p \vee q)) = 1.$$

2. Clairement $\mathsf{u}_0 \nVdash p$ et $\mathsf{u}_0 \nVdash q$ donc $\mathsf{u}_0 \nVdash p \vee q$. Rappelons que $\mathsf{u} \Vdash \neg\varphi$ si et seulement si pour tout v tel que $\mathsf{v} \geq \mathsf{u}$ on a $v \nVdash \varphi$. Montrons donc que pour tout $\mathsf{v} \in \{\mathsf{u}_0, \mathsf{u}_\mathsf{p}, \mathsf{u}_\mathsf{q}\}$, $\mathsf{v} \nVdash \neg p \,\&\, \neg q$. En effet $\mathsf{u}_\mathsf{p} \nVdash \neg q$ donc $\mathsf{u}_\mathsf{p} \nVdash \neg p \,\&\, \neg q$ et $\mathsf{u}_\mathsf{q} \nVdash \neg p$ donc $\mathsf{u}_\mathsf{q} \nVdash \neg p \,\&\, \neg q$, par monotonicité, $\mathsf{u}_0 \nVdash \neg p \,\&\, \neg q$. On a donc $\mathsf{u}_0 \Vdash \neg(\neg p \,\&\, \neg q)$.
   Puisque $\mathsf{u}_0 \nVdash p \vee q$, et $\mathsf{u}_0 \Vdash \neg(\neg p \,\&\, \neg q)$, on a $\mathsf{u}_0 \nVdash \neg(\neg p \,\&\, \neg q) \Rightarrow (p \vee q)$ et donc $\mathcal{M} \not\models \neg(\neg p \,\&\, \neg q) \Rightarrow (p \vee q)$. Par le théorème de correction de la logique intuitionniste, on conclut que $\nvdash \neg(\neg p \,\&\, \neg q) \Rightarrow (p \vee q)$ et donc $\neg(\neg p \,\&\, \neg q) \Rightarrow (p \vee q)$ n'a pas de preuve intuitionniste.
3.

$$\Rightarrow I\;\dfrac{RAA\;\dfrac{\Rightarrow E\;\dfrac{\Gamma \vdash \neg(\neg p \,\&\, \neg q) \qquad \&I\;\dfrac{\mathcal{D}_p \qquad \mathcal{D}_q}{\Gamma \vdash \neg p \,\&\, \neg q}}{\Gamma \vdash \bot}}{\neg(\neg p \,\&\, \neg q) \vdash p \vee q}}{\vdash \neg(\neg p \,\&\, \neg q) \Rightarrow p \vee q}$$

où $\Gamma = \neg(\neg p \,\&\, \neg q), \neg(p \vee q)$

$$\mathcal{D}_p = \quad \Rightarrow I\;\dfrac{\Rightarrow E\;\dfrac{\Gamma, p \vdash \neg(p \vee q) \qquad \vee I_g\;\dfrac{\Gamma, p \vdash p}{\Gamma, p \vdash p \vee q}}{\Gamma, p \vdash \bot}}{\Gamma \vdash \neg p}$$

$$\mathcal{D}_q = \quad \Rightarrow I\;\dfrac{\Rightarrow E\;\dfrac{\Gamma, q \vdash \neg(p \vee q) \qquad \vee I_d\;\dfrac{\Gamma, q \vdash q}{\Gamma, q \vdash p \vee q}}{\Gamma, q \vdash \bot}}{\Gamma \vdash \neg q}$$