

La logique propositionnelle classique

version du 20 novembre 2002 – 11h 27

En déduction naturelle

On ajoute la règle dite de **réduction par l'absurde**.

$$\text{RAA} \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

Attention : il ne faut pas confondre cela avec

$$\frac{\Gamma, p \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg p}$$

qui est en fait :

$$\frac{\Gamma, p \vdash \perp}{\Gamma \vdash p \Rightarrow \perp}$$

Exercice

Prouvez

1. $\neg\neg p \Rightarrow p$
2. $p \vee \neg p$
3. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

Exercise 1

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\neg\neg p, \neg p \vdash \perp}{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg\neg p} \text{RAA}}{\neg\neg p \vdash p} \Rightarrow I}{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg\neg p} \Rightarrow E}{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg\neg p} \Rightarrow E$$

Exercise 2

$$\frac{}{\neg(p \vee \neg p), p \vdash p} \text{VI}$$

$$\frac{}{\neg(p \vee \neg p), p \vdash \neg(p \vee \neg p) \quad \neg(p \vee \neg p), p \vdash p \vee \neg p} \Rightarrow E$$

$$\neg(p \vee \neg p), p \vdash \perp$$

$$\frac{}{\Rightarrow I}$$

$$\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg p$$

$$\frac{}{\text{VI}}$$

$$\neg(p \vee \neg p) \vdash p \vee \neg p$$

$$\frac{}{\Rightarrow E}$$

$$\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg(p \vee \neg p)$$

$$\neg(p \vee \neg p) \vdash \perp$$

$$\frac{}{\text{RAA}}$$

$$\vdash p \vee \neg p$$

Correction et complétude

Interprétation : une fonction de *proposition* vers $\{0, 1\}$, somme et produit modulo 2.

- $v(p \Rightarrow q) = 1 + v(p) + v(p).v(q)$
- $v(p \vee q) = v(p) + v(q) + v(p).v(q)$
- $v(p \& q) = v(p).v(q)$
- $\perp = 0$

$\Gamma \models_{NK} p$ signifie que si $v(q) = 1$ pour tout $q \in \Gamma$ alors $v(p) = 1$

Correction et complétude (suite)

La logique propositionnelle est **correcte**,

c-à-d $\Gamma \vdash_{NK} p$ implique $\Gamma \models_{NK} p$

La logique propositionnelle est **complète**,

c-à-d $\Gamma \models_{NK} p$ implique $\Gamma \vdash_{NK} p$