La logique propositionnelle classique

version du 16 octobre 2002 – 18 h 27

En déduction naturelle

On ajoute la règle dite de réduction par l'absurde.

$$RAA \quad \frac{\Gamma, \neg p \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

Attention : il ne faut pas confondre cela avec

$$\frac{\Gamma, p \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg p}$$

qui est en fait :

$$\frac{\Gamma, p \vdash \perp}{\Gamma \vdash p \Rightarrow \perp}$$

Exercice

Prouvez

1. $\neg\neg p \Rightarrow p$
2. $p \vee \neg p$
3. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

Exercice 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg\neg p \qquad \neg\neg p, \neg p \vdash \neg p}{\neg\neg p, \neg p \vdash \bot} \Rightarrow E}{\neg\neg p \vdash p}\, RAA}{\vdash \neg\neg p \Rightarrow p} \Rightarrow I$$

Exercice 2

$$\dfrac{\dfrac{\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg(p \vee \neg p) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(p \vee \neg p), p \vdash \neg(p \vee \neg p) \qquad \dfrac{\neg(p \vee \neg p), p \vdash p}{\neg(p \vee \neg p), p \vdash p \vee \neg p}\,\vee I}{\neg(p \vee \neg p), p \vdash \bot}\Rightarrow E}{\neg(p \vee \neg p) \vdash \neg p}\Rightarrow I}{\neg(p \vee \neg p) \vdash p \vee \neg p}\,\vee I}{\neg(p \vee \neg p) \vdash \bot}\Rightarrow E}{\vdash p \vee \neg p}\,RAA$$

Correction et complétude

Interprétation : une fonction de $proposition$ vers $\{0, 1\}$, somme et produit modulo 2.

- $v(p \Rightarrow q)$ = $1 + v(p) + v(p).v(q)$
- $v(p \vee q)$ = $v(p) + v(q) + v(p).v(q)$
- $v(p \,\&\, q)$ = $v(p).v(q)$
- $\perp$ = 0

$\Gamma \models_{NK} p$ signifie que si $v(q) = 1$ pour tout $q \in \Gamma$ alors $v(p) = 1$

Correction et complétude (suite)

La logique propositionnelle est correcte,

c-à-d $\Gamma \vdash_{NK} p$ implique $\Gamma \models_{NK} p$

La logique propositionnelle est complète,

c-à-d $\Gamma \models_{NK} p$ implique $\Gamma \vdash_{NK} p$