Introduction à la Logique

version du 18 octobre 2002 – 15 h 27

Quels sont les buts de la logique ?

– Pour tous
– Pour les mathématiciens
– Pour les informaticiens

Quels sont les buts de la logique ?

Pour tous

- Comprendre la nature intime du raisonnement mathématique [a]
- Faire du “raisonnement” une théorie mathématique comme les autres.
- Donner un sens précis à ce que peut-être le vrai

  dès qu’il s’agit de raisonnement et d’argumentation.

[a] et du raisonnement non mathématique (philosophique, judiciaire) !

Quels sont les buts de la logique ?

Pour les mathématiciens

- S'assurer (se convaincre ?) que les mathématiques sont exemptes de contradictions et de paradoxes.
- Apprendre une branche des mathématiques.

Quels sont les buts de la logique ?

Pour les informaticiens

- Mécaniser les processus de raisonnement.
- Exhiber les liens entre démonstrations et calculs.
- Formaliser les objets informatiques,
  - pour la sûreté (par exemple, la ligne 14 du métro parisien),
  - et le sécurité.

Ce que la logique n’est pas

Point de vue personnel

– Le fondement ultime auquel se réduisent les mathématiques, (point de vue réductionniste)

  Des réductions sont possibles et utiles et la logique peut aider à en faire,

  mais il n’y pas de réduction ultime.

– La discipline qui va faire remplacer les humains (en général) et les mathématiciens (en particulier) par des machines (point de vue mécaniste).

La logique, une théorie mathématique

La logique est une théorie mathématique[a],

- elle utilise les mathématiques comme le font les autres branches des mathématiques,
- elle étudie des sortes particulières d'objets mathématiques : les propositions, les théorèmes, les jugements, les démonstrations, etc.

[a] comme les autres !

Un peu d'histoire

L'histoire montre que tout ce qui est susceptible de se mathématiser se mathématise.

Au début, seuls les entiers sont des êtres mathématiques.

Puis les Anciens acceptent les rationnels et les relatifs.

A la Renaissance, les complexes (ou imaginaires) deviennent eux-aussi des êtres mathématiques.

Un peu d’histoire

Au dix-neuf siècle

– les réels (Dedekind),

– puis les fonctions (en “extension”)

– et les ensembles (Cantor) deviennent des êtres mathématiques.

Au début du vingtième siècle, les fonctions (en “intention”) (Church et Curry) et les théorèmes (Boole, Frege etc.) deviennent des êtres mathématiques.

Aujourd’hui (1980), les démonstrations (Curry et Howard) deviennent des êtres mathématiques.

Mécaniser la logique ?

Deux positions s'affrontent.

Le mathématicien ne sera jamais battu par une machine

Alain Connes (le triangle de la pensée)

Il existe un théorème qui ne peut être prouvé que par un ordinateur

Veroff and McCune : Les algèbres de Boole peuvent être axiomatisées par l'axiome

$$((x \mid z) \mid y) \mid ((x \mid (x \mid y)) \mid x) = y$$

où est $\mid$ est le symbole de Sheffer qui peut être interprété comme

$$x \mid y \quad = \quad \bar{x} \,\&\, \bar{y}.$$

Mécaniser la logique ?

Deux positions s'affrontent.

Le mathématicien ne sera jamais battu par une machine

Alain Connes (le triangle de la pensée)

Il existe un théorème qui ne peut être prouvé que par un ordinateur

Veroff and McCune : Les algèbres de Boole peuvent être axiomatisées par l'axiome

$$((x \mid z) \mid y) \mid ((x \mid (x \mid y)) \mid x) = y$$

où est $\mid$ est le symbole de Sheffer qui peut être interprété comme

$$x \mid y \quad = \quad \bar{x} \,\&\, \bar{y}.$$

Est-ce un théorème profond ?

Modèles

Informellement, un modèle est une structure mathématique dans laquelle toutes les règles de déduction et les axiomes sont «satisfaits».

On dit qu'une formule est valide si elle est satisfaite dans tous les modèles.

Les deux niveaux de la logique

En logique, il y a deux niveaux qui interfèrent et qu'il ne faut pas confondre.

– La théorie, (on dit aussi parfois la théorie objet, si l'on veut être plus précis).

– La méta-théorie, c'est une mathématique dans laquelle on va raisonner sur l'objet. C'est aussi un système logique !

Les deux niveaux de la logique

Le théorie objet est l’objet logique que l’on étudie et que l’on souhaite donc formaliser.

En général, on accepte dans la méta-théorie toute la puissance du raisonnement traditionnel. Si elle est mécanisée, cela peut-être par un système formel plus ou moins puissant.

Les deux niveaux de la logique

Dans la méta-théorie, on prouve des méta-théorèmes, c-à-d des théorèmes à propos de la théorie objet.

Quelques méta-théorèmes courants sont :

– la correction,

– la cohérence,

– la complétude.

Les concepts méta-logiques

La correction est la propriété d'un système de preuve de ne prouver que des théorèmes qui sont des formules valides.

La cohérence est la propriété d'un système de preuve d'être absent de contradiction, on ne peut pas prouver une propriété et son contraire.

La complétude est la propriété d'un système de preuve de prouver toutes les formules valides.

Les ingrédients de la logique 1/7

Les aspects preuves

En logique on trouve :

– un langage d'expressions bien formées :

  · les propositions (construites avec des *connecteurs*),

  · les jugements,

  · etc.

  On dit aussi que c'est la syntaxe.

– des règles de déduction,

– des axiomes.

Les ingrédients de la logique 2/7

Les règles de déduction montrent comment construire des théorèmes à partir d'autres théorèmes. On définit dans la méta-théorie,

– des fonctions des propositions vers les propositions (règles monadiques),
– ou des fonctions des couples de propositions vers les propositions (règles dyadiques).

Les propositions à partir desquelles ont fait la déduction dans la règle s'appelle les prémisses. La proposition que l'on déduit s'appelle la conséquence.

Les ingrédients de la logique 3/7

Les axiomes affirment que certaines propositions sont des théorèmes : on définit le prédicat unaire «être un théorème» dans la méta-théorie et on affirme que les axiomes sont des formules qui satisfont ce prédicat.

N.B. Les axiomes sont en général vus comme des règles sans prémisses.

Les ingrédients de la logique 4/7

Le but des axiomes et des règles de déduction est de former des expressions particulières, les théorèmes en construisant des objets mathématiques particuliers les démonstrations (ou preuves).

Les ingrédients de la logique 5/7

Les preuves sont des arbres dont

– les noeuds sont les règles de déduction,

– les feuilles sont les axiomes

– et la racine est le théorème dont c'est la preuve.

$$\dfrac{\dfrac{\cdots \quad \dfrac{\cdots \quad \cdots}{} (foo_1) \quad \dfrac{\cdots}{} (bar)}{} (foo_2) \qquad \cdots}{\Gamma \vdash \Delta} (foo_1)$$

Les ingrédients de la logique 6/7

Il y a différentes sortes d'objets : propositions[a], théorèmes, etc.

Dans une logique, l'appartenance d'un objet à telle ou telle sorte se décrète par un jugement.

[a] qui ne sont pas théorèmes

Syntaxe concrète et syntaxe abstraite

Un ordinateur a besoin qu'on lui parle de la syntaxe à un bas niveau, c'est la syntaxe concrète, c-à-d les virgules, les parenthèses, les retours à la ligne, etc.

Un humain préfère une syntaxe lisible et flexible, il a besoin de la syntaxe abstraite, c-à-d plutôt la structure arborescente, donc il souhaite des opérateurs infixes, l'associativité.

Les ingrédients de la logique 7/7

Les aspects modèles

On interprète le langage dans les modèles. On parle aussi de sémantique.

Les propositions qui sont “satisfaites” (dans un sens à préciser) par le modèle sont dites valides.

Correction, cohérence et complétude établissent des liens entre

– les théorèmes (propositions prouvables)

– et les tautologies (propositions valides),

c’est-à-dire entre la prouvabilité et la validité.

Les deux branches de la logique

La partie de la logique où l’on s’intéresse plutôt aux démonstrations s’appelle la la théorie de la démonstration ou théorie de la preuve (proof theory).

La partie de la logique où l’on s’intéresse plutôt à la validité s’appelle la théorie des modèles.

Bibliographie

Un livre de base :

R. Lalement. Logique, Réduction, Résolution. Études et recherches en informatique. Masson, Paris, 1990.

Ma référence :

D. van Dalen. Logic and Structure. Springer Verlag, 1994.

Bibliographie (suite)

Un livre assez complet sur la logique de l'informatique en français :

P. Gochet, P. Gribomont. Logique. Volume 1 : méthodes pour l'informatique fondamentale, HERMES, 1990

Sur la logique épistémique :

R. Fagin, Y. Halpern, Y. Moses, and M. Y. Vardi. Reasoning about Knowledge. The MIT Press, 1995.