

Magistère d'Informatique et Modélisation

Complétude du calcul propositionnel intuitionniste

Le but de ce qui suit est de montrer la complétude du calcul propositionnel intuitionniste vis-à-vis des modèles de Kripke. Sans beaucoup nuire à la généralité, on se restreindra à un calcul ne contenant que les connecteurs \vee et \rightarrow . Auparavant on montre que l'on peut indifféremment considérer les modèles finis ou les modèles finis et/ou infinis.

Partie 1 : Modèles finis ou infinis

Dans cette partie on montre que pour le calcul propositionnel intuitionniste, la validité dans les modèles de Kripke infinis se ramène à la validité dans les modèles de Kripke finis.

L'ensemble des propositions est noté PROP et l'ensemble des variables propositionnelles est noté Var . Un ensemble Γ de propositions est *stable par sous terme* (ou sous-formule) si quand Γ contient ϕ il contient toutes les propositions qui sont des sous-termes de ϕ .

Un modèle de Kripke du calcul propositionnel est un triplet $\mathcal{K} = (U, \leq, I)$, où U est un ensemble fini ou infini, \leq est un ordre sur U et $I : \text{Var} \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ et tel que pour chaque variable propositionnelle $p \in \text{Var}$, $I(p)$ est un sous-ensemble dirigé de U , c'est-à-dire tel que $u \in I(p)$ et $u \leq v$ impliquent $v \in I(p)$. On définit une relation $\Vdash_{\mathcal{K}}$ (ou plus simplement \Vdash) sur $U \times \text{PROP}$ par induction sur la structure des propositions :

- si la proposition est une variable propositionnelle p , alors $u \Vdash p$ signifie que $u \in I(p)$,
- si la proposition est de la forme $\phi \vee \psi$, alors $u \Vdash \phi \vee \psi$, signifie que $u \Vdash \phi$ ou $u \Vdash \psi$,
- si la proposition est de la forme $\phi \rightarrow \psi$, alors $u \Vdash \phi \rightarrow \psi$ signifie que pour tout $v \geq u$ si $v \Vdash \phi$ alors $v \Vdash \psi$.

ϕ est valide dans \mathcal{K} , ce qui s'écrit $\mathcal{K} \models \phi$, ssi pour tout $u \in U$, $u \Vdash \phi$ et ϕ est valide, ce qui s'écrit $\models \phi$, ssi pour tout modèle \mathcal{K} , $\mathcal{K} \models \phi$.

Soient \mathcal{K} un modèle de Kripke et Γ un ensemble fini de propositions stable par sous-terme. Nous associons à \mathcal{K} un modèle de Kripke fini $\mathcal{K}_{\Gamma} = (U_{\Gamma}, \leq_{\Gamma}, I_{\Gamma})$ comme suit. On définit, pour chaque $u \in U$, $[u] = \{\phi \in \Gamma \mid u \Vdash \phi\}$ et $U_{\Gamma} = \{[u] \mid u \in U\}$. L'ordre \leq_{Γ} est l'ordre d'inclusion des sous-ensembles de PROP . On écrit \Vdash_{Γ} au lieu de $\Vdash_{\mathcal{K}_{\Gamma}}$. Par définition $I_{\Gamma}(p) = \{[u] \mid p \in [u]\}$. On dit que \mathcal{K}_{Γ} est obtenu par *filtration* à partir de \mathcal{K} .

1. Montrez que U_{Γ} est fini et que \mathcal{K}_{Γ} satisfait les critères de définition d'un modèle de Kripke (c'est-à-dire que I_{Γ} est dirigé pour \leq_{Γ} qui est aussi \subseteq).
2. Montrez que si $\phi \in \Gamma$ les trois conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) $[u] \Vdash_{\Gamma} \phi$
 - (ii) $u \Vdash \phi$ (autrement dit dans ce cas $\phi \in [u]$).
3. Montrez que $\models \phi$ si et seulement si $\mathcal{K} \models \phi$ pour tous les modèles \mathcal{K} finis.

Partie 2 : Ensembles premiers

Dans la suite, on considère les modèles de Kripke finis ou infinis.

Un ensemble de propositions Δ est *premier* s'il satisfait les deux conditions :

- a. Δ est clos par \vdash ,
- b. quand $\psi \vee \chi \in \Delta$ alors ou bien $\psi \in \Delta$, ou bien $\chi \in \Delta$.

Soient Γ un ensemble de propositions et ϕ une proposition telle $\Gamma \not\vdash \phi$, on veut construire un ensemble Γ' premier qui contient Γ et tel que $\Gamma' \not\vdash \phi$. Pour cela, on ordonne les propositions disjonctives en une suite $(\psi_1 \vee \chi_1, \dots, \psi_n \vee \chi_n, \dots)$ et l'on construit la suite Γ_k ainsi. Γ_0 est Γ . Supposons construit Γ_k avec $\Gamma_k \not\vdash \phi$ et considérons la première proposition de la suite ci-dessus telle que $\Gamma_k \vdash \psi_{n_k} \vee \chi_{n_k}$ et $\Gamma_k \not\vdash \psi_{n_k}$ et $\Gamma_k \not\vdash \chi_{n_k}$.

1. Expliquez pourquoi une telle proposition $\psi_{n_k} \vee \chi_{n_k}$ existe toujours.
2. Montrez que l'on n'a pas à la fois $\Gamma_k, \psi_{n_k} \vdash \phi$ et $\Gamma_k, \chi_{n_k} \vdash \phi$. Ainsi on définit

$$\Gamma_{k+1} := \begin{cases} \Gamma_k \cup \{\psi_{n_k}\} & \text{si } \Gamma_k, \psi_{n_k} \not\vdash \phi \\ \Gamma_k \cup \{\chi_{n_k}\} & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

3. Soit $\Gamma' = \bigcup_{k \geq 0} \Gamma_k$. Montrez que $\Gamma' \not\vdash \phi$.
4. Montrez que Γ' est premier.

Partie 3 : Théorème de complétude

Dans cette partie on veut montrer que si $\Gamma \not\vdash \phi$ alors il existe un modèle de Kripke $\mathcal{K} = (U, \leq, I)$ et un monde u minimum dans U telle que $u \Vdash \Gamma$ et $u \not\vdash \phi$. On construit tout d'abord un ensemble premier Γ' tel que $\Gamma' \supseteq \Gamma$ et $\Gamma' \not\vdash \phi$. U est l'ensemble des suites finies d'entiers ordonnées par l'ordre préfixe (ε est la suite vide). Donc un monde de U est une suite finie d'entiers $\alpha \equiv a_1 \dots a_p$.

1. On construit le modèle \mathcal{K} et des ensembles $\Gamma(\alpha)$ associés à chaque suite d'entiers α (c'est-à-dire à chaque monde de U).
 - cas ε , $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma'$.
 - cas αi . Soit une suite $((\sigma_0, \tau_0), (\sigma_1, \tau_1), \dots, (\sigma_n, \tau_n), \dots)$ énumérant tous les (σ_i, τ_i) tels que $\Gamma(\alpha), \sigma_i \not\vdash \tau_i$. On peut construire un ensemble premier $\Gamma(\alpha i)$ tel que $\sigma_i \in \Gamma(\alpha i)$ et $\Gamma(\alpha i) \not\vdash \tau_i$. Pourquoi ?
 Par définition, $\alpha \in I(p)$ si et seulement si $p \in \Gamma(\alpha)$.
2. Supposant que pour tout β , $\beta \Vdash \psi_1$ si et seulement si $\Gamma(\beta) \vdash \psi_1$ et $\beta \Vdash \psi_2$ si et seulement si $\Gamma(\beta) \vdash \psi_2$, montrez que $\alpha \Vdash \psi_1 \rightarrow \psi_2$ implique $\Gamma(\alpha) \vdash \psi_1 \rightarrow \psi_2$.
3. Montrez que $\alpha \Vdash \psi$ si et seulement si $\Gamma(\alpha) \vdash \psi$.
4. Montrez que $\varepsilon \Vdash \psi$ (pour chaque $\psi \in \Gamma$) et que $\varepsilon \not\vdash \phi$.
5. Montrez que si $\models \phi$ alors $\vdash \phi$.