Les modèles de Kripke de la logique propositionnelle

version du November 27, 2002 – 19 h 01

Notations

À partir de maintenant, je note

1. les propositions $\varphi, \psi, \chi, \theta$ etc.
2. les variables propositionnelles p, q, r, s, t,
3. les environnements Γ, Θ, Σ

Les modèles de Kripke (cas général)

Un modèle de Kripke est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{U}_\mathcal{M}, \mathcal{I}_\mathcal{M}, \mathcal{R}_\mathcal{M})$ où

- $\mathcal{U}_\mathcal{M}$ est un ensemble dont les éléments sont appelés
  - des mondes,
  - des mondes possibles,
  - des étapes (de raisonnement),
  - des états.
- $\mathcal{I}_\mathcal{M} : Variables \to \mathcal{P}(\mathcal{U}_\mathcal{M})$. Intuitivement $\mathcal{I}_\mathcal{M}(p)$ est l'ensembles des mondes où la variable p est satisfaite.

Les mondes sont notés u, v, w.

Les modèles de Kripke (cas général)

- $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} = (R_1, ..R_n)$ est un ensemble de relations dites relations d'accessibilité.

  Si $u\, R_i\, v$ alors le monde v est accessible à partir de u pour i[a].

Les propriétés (transitivité, réflexivité, symétrie ou antisymétrie) des relations R_i jouent un rôle.

$\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$ doit satisfaire de compatibilité avec les R_i.

[a] On verra plus tard ce que ça signifie.

Les modèles de Kripke (cas propositionnelle)

1. Il n'y a qu'une relation notée $\leq_{\mathcal{M}}$, qui est un ordre, c-à-d réflexive, antisymétrique et transitive.
2. $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$ est dirigé, c-à-d que pour toute variable propositionnelle p,

   si $u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$ et $u \leq_{\mathcal{M}} v$ alors $v \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$.

Forcage

On définit sur $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ une relation dite de forcage qui s'écrit[a]:

- $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$
- ou $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$
- ou $u \Vdash \varphi$ s'il n'y a pas d'ambiguïtés sur $\mathcal{M}$.

[a] parfois aussi notée $\mathcal{M}, u \models u$

Forcage

1. Si φ est une variable p:

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$$

2. Si φ est une conjonction $\psi \wedge \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{et} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

3. Si φ est une disjonction $\psi \vee \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M}, u \Vdash \psi \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}, u \Vdash \theta$$

4. Si φ est une implication $\psi \Rightarrow \theta$

$$\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$$

ssi

pour tout $v \geq_M u$ si $\mathcal{M}, v \Vdash \psi$ alors $\mathcal{M}, v \Vdash \theta$

5. Si $\perp$ est l'absurde, alors $\mathcal{M}, u \nVdash \perp$.

Monotonicité du forcage

Proposition $\boxed{\Vdash_{\mathcal{M}} \text{ est monotone.}}$

Si $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ et $u \leq_{\mathcal{M}} v$ alors $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$

Monotonicité du forcage

Proposition $\boxed{\Vdash_{\mathcal{M}} \text{ est monotone.}}$

Si $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ et $u \leq_{\mathcal{M}} v$ alors $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$

En exercice !

Donc pour tout φ, l'ensemble $\{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \mid u \Vdash \varphi\}$ est dirigé.

Exercice

Soit le modèle de Kripke $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd}
u_1 & & u_2 \\
& u_0 \arrow[ul, no head] \arrow[ur, no head] &
\end{tikzcd}$$

où $u_0 \Vdash p$ et $u_1 \Vdash q$.

1. Donnez les valeurs de $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ pour p et q.
2. Annotez les mondes qui forcent $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$

Quelques définitions

1. $\mathcal{M} \models \varphi$ ($\mathcal{M}$ modélise φ, φ est valide dans $\mathcal{M}$)

   si pour tout $u \in \mathcal{M}$, on a $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$.

2. $\models \varphi$, (φ est valide),

   si pour tout modèle de Kripke $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \models \varphi$.

Théorème de correction $\boxed{\text{Si } \vdash \varphi \text{ alors } \models \varphi.}$

- On va prouver un lemme, pour lequel on a besoin d'une définition.

Définition: $\Gamma \models \varphi$ où $\Gamma \equiv \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$

signifie que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$,

$$u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1, ..., u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_n \text{ implique } u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi.$$

Lemme $\boxed{\text{Si } \Gamma \vdash \varphi \text{ alors } \Gamma \models \varphi.}$

La démonstration se fait par induction sur la structure de l'arbre de preuve de $\Gamma \vdash \varphi$.

On fixe le modèle $\mathcal{M}$ dans la preuve.

On suppose que pour tout u, on a $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1$,..., $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_n$.

On cherche à montrer que $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$.

- L'arbre est réduit à une feuille. Alors $\varphi \in \Gamma$ et comme $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1$,..., $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_n$, on a $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$

Lemme $\boxed{\text{Si } \Gamma \vdash \varphi \text{ alors } \Gamma \models \varphi.}$

- Le nœud de la racine est la règle $\Rightarrow$I et donc le jugement est $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \theta$.

  Par induction il existe un arbre de preuve pour $\Gamma, \psi \vdash \theta$.

  L'hypothèse d'induction nous dit que pour n'importe quel monde w tel que

  $$w \Vdash \varphi_1, ..., w \Vdash \varphi_n, w \Vdash \psi$$

  on a

  $$w \Vdash \theta.$$

Considérons maintenant un monde u tel que

$$u \Vdash \varphi_1, ..., u \Vdash \varphi_n.$$

Si v est monde tel que $u \leq_{\mathcal{M}} v$ et $v \Vdash \psi$.

Par monotonicité,

$$v \Vdash \varphi_1, ..., v \Vdash \varphi_n.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à v et l'on a $v \Vdash \theta$.

Par la définition de $\Vdash$ sur $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \theta$ cela donne $u \Vdash \varphi$.

Lemme $\boxed{\text{Si } \Gamma \vdash \varphi \text{ alors } \Gamma \models \varphi.}$

- Le nœud de la racine est la règle $\Rightarrow$E

  On a donc deux arbres de preuve pour $\Gamma \vdash \psi$ et $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi$.

  Soit u tel que

  $$u \Vdash \varphi_1, \ldots, u \Vdash \varphi_n.$$

  alors par hypothèse d'induction d'une part $u \Vdash \psi$ d'autre part $u \Vdash \psi \Rightarrow \varphi$.

  Par définition de $u \Vdash \psi \Rightarrow \varphi$, on a $u \Vdash \varphi$.

Lemme $\boxed{\text{Si } \Gamma \vdash \varphi \text{ alors } \Gamma \models \varphi.}$

- Le nœud de la racine est la règle $\perp$.

  Si $u \Vdash \psi$ (pour tout $\psi \in \Gamma$) alors $u \Vdash \perp$, mais on sait que ça n'est pas possible, donc chaque fois qu'on a $u \Vdash \psi$ (pour tout $\psi \in \Gamma$), on aussi $u \Vdash \varphi$, donc $\Gamma \models \varphi$.

Lemme $\boxed{\text{Si } \Gamma \vdash \varphi \text{ alors } \Gamma \models \varphi.}$

- Le nœud de la racine est la règle $\vee I_g$ avec $\Gamma \vdash \theta \vee \chi$.

  L'hypothèse d'induction dit que pour tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$

  – si pour tout $\psi \in \Gamma$ on a $u \Vdash \psi$ alors $u \Vdash \theta$,

  donc aussi $u \Vdash \theta \vee \chi$.

Lemme $\boxed{\text{Si } \Gamma \vdash \varphi \text{ alors } \Gamma \models \varphi.}$

- Le nœud de la racine est la règle $\vee E_g$ avec comme prémisse

  $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, $\quad \Gamma, \varphi \vdash \theta$ $\quad$ et $\quad \Gamma, \psi \vdash \theta$

  et comme conclusion $\Gamma \vdash \theta$.

  Considérons les u qui satisfont $u \Vdash \chi$ pour $\chi \in \Gamma$.

  L'hypothèse d'induction nous dit que pour ces u, on doit avoir $u \Vdash \varphi \vee \psi$.

  Si de plus $u \Vdash \varphi$ alors $u \Vdash \theta$.

  Et si de plus $u \Vdash \psi$ alors $u \Vdash \theta$ aussi.

  Mais comme on sait que $u \Vdash \varphi$ ou $u \Vdash \psi$ alors dans tous les cas $u \Vdash \theta$.