Logique cominatoire

version du November 27, 2002 – 16 h 35

La logique combinatoire

Il s'agit d'une structure algébrique avec trois opérateurs.

- Un opérateur binaire l'application,
- Deux constantes S et K.

$$M, N \quad ::= \quad \mathsf{S} \mid \mathsf{K} \mid x \mid M\ N$$

Forment les CL-termes.

Si M et P sont deux CL-termes on note l'application de M à P tout simplement par la concaténation soit $M\ P$.

La logique combinatoire

On définit deux règles de réduction

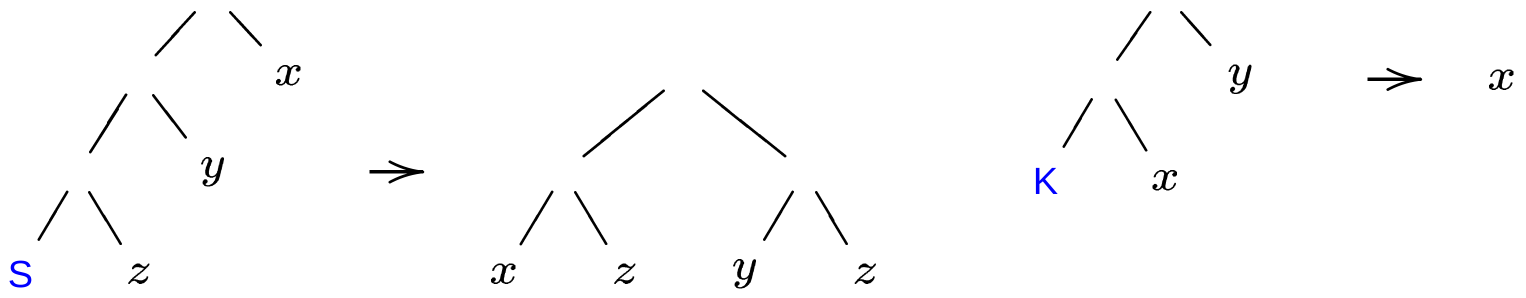
$$\begin{array}{lcl} \mathsf{S}xyz & \xrightarrow[CL]{} & xz(yz) \\ \mathsf{K}xy & \xrightarrow[CL]{} & x \end{array}$$

La logique combinatoire

On définit deux règles de réduction

$$\mathsf{S}xyz \xrightarrow[CL]{} xz(yz)$$

$$\mathsf{K}xy \xrightarrow[CL]{} x$$



x1 Quelques termes

$$\begin{aligned} \mathsf{SKK}x &\xrightarrow[CL]{} \mathsf{K}x(\mathsf{K}x) \\ &\xrightarrow[CL]{} x \end{aligned}$$

On appelle très naturellement ce terme I et on retient la règle

$$\mathsf{I}x \xrightarrow[CL]{} \!\!\!\!\!\rightarrow x$$

Quelques termes

On remarque que

$$\begin{aligned} \mathsf{SII}x &\xrightarrow[CL]{} \mathsf{I}x(\mathsf{I}x) \\ &\xrightarrow[CL]{} x\,x \end{aligned}$$

donc

$$\mathsf{SII}(\mathsf{SII}) \quad \overset{}{\underset{CL}{\twoheadrightarrow}} \quad \mathsf{SII}(\mathsf{SII})$$

SII correspond à ω et $\mathsf{SII}(\mathsf{SII})$ correspond à Ω.

Quelques termes

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}\,xyz &\xrightarrow[CL]{} \mathsf{KS}x(\mathsf{K}x)yz \\
&\xrightarrow[CL]{} \mathsf{S}(\mathsf{K}x)yz \\
&\xrightarrow[CL]{} \mathsf{K}xz(yz) \\
&\xrightarrow[CL]{} x(yz).
\end{aligned}
$$

Donc $\mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}$ équivaut à $B \equiv \lambda xyz.x(yz)$.

Questions

Quel combinateur satisfait $\mathsf{F}xy \xrightarrow[CL]{} y$?

Que vaut

$$\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})?$$

Types

Typage

On a tout d'abord:

$$\begin{aligned} &\vdash \quad \mathsf{S} : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \\ &\vdash \quad \mathsf{K} : \alpha \to \beta \to \alpha. \end{aligned}$$

Associé à la règle

$$\frac{\vdash M : \sigma \to \tau \qquad \vdash N : \sigma}{\vdash MN : \tau}\,(App)$$

on voit qu'on a une correspondance de Curry-Howard entre la logique combinatoire et la logique propositionnelle intuitionniste à la Hilbert.

Typage

On a de plus

$$\begin{array}{rcl} & \vdash & \mathsf{I} : \alpha \to \alpha \\ & \vdash & \mathsf{B} : (\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha) \to \gamma \to \beta, \\ x : \alpha \to \beta \to \gamma & \vdash & \mathsf{S}\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \end{array}$$

Correspondance avec le lambda-calcul

Des CL-termes vers les λ-termes

On peut donner une interprétation $[\![\_]\!]_\lambda$ des CL-termes vers les lambda-termes.

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{K}]\!]_\lambda &= \lambda xy.x \\
[\![\mathsf{S}]\!]_\lambda &= \lambda xyz.x\ z\ (y\ z) \\
[\![M_1\ M_2]\!]_\lambda &= [\![M_1]\!]_\lambda\ [\![M_2]\!]_\lambda \\
[\![x]\!]_\lambda &= x
\end{aligned}
$$

Des CL-termes vers les λ-termes

Cette interprétation préserve les types.

Autrement dit si M est le terme de preuve de σ dans la logique propositionnelle intuitionniste à la Hilbert,

alors $[\![M]\!]_\lambda$ est terme de preuve de σ dans la déduction naturelle pour la logique propositionnelle intuitionniste.

Abstractions dans les CL-termes

On définit une opération d'abstraction $[x].M$ sur les CL-termes de la façon suivante

Si $x \notin FV(M)$ alors

$$[x].M \quad = \quad \mathsf{K}M$$

sinon

$$\begin{aligned} [x].(M_1\ M_2) &= \mathsf{S}\,([x].M_1)\,([x].M_2) \\ [x].x &= \mathsf{I} \end{aligned}$$

Abstractions dans les CL-termes

Par exemple,

$$\begin{aligned} [x].\mathsf{K} &= \mathsf{K}\,\mathsf{K} \\ [x].\mathsf{S}\,x &= \mathsf{S}\,([x].\mathsf{S})\,([x].x) \\ &= \mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})\,\mathsf{I} \end{aligned}$$

Abstractions dans les CL-termes

$$
\begin{aligned}
[x].[y].\mathsf{K}\;x\;y &= [x].\mathsf{S}\;([y].(\mathsf{K}\;x))\;([y].y) \\
&= [x].\mathsf{S}\;(\mathsf{K}\;(\mathsf{K}\;x))\;\mathsf{I} \\
&= \mathsf{S}\;([x].\mathsf{S})\;([x].(\mathsf{K}\;(\mathsf{K}\;x))\;\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\;(\mathsf{K}\;\mathsf{S})\;(\mathsf{S}\;([x].(\mathsf{K}\;(\mathsf{K}\;x)))\;([x].\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\;(\mathsf{K}\;\mathsf{S})\;(\mathsf{S}\;(\mathsf{S}([x].\mathsf{K})\;([x].(\mathsf{K}\;x))\;(\mathsf{K}\;\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\;(\mathsf{K}\;\mathsf{S})\;(\mathsf{S}\;(\mathsf{S}(\mathsf{K}\;\mathsf{K})\;(\mathsf{S}\;(\mathsf{K}\;\mathsf{K})\;\mathsf{I}))\;(\mathsf{K}\;\mathsf{I})
\end{aligned}
$$

Typage des abstractions

Si $x : \sigma, \Gamma \vdash M : \tau$ alors $\Gamma \vdash [x].M : \sigma \to \tau$.

Par induction sur la structure de M.

- si $x \notin FV(M)$ alors $\Gamma \vdash \mathsf{K}M : \sigma \to \tau$ pour n'importe quel σ.
- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv M_1\ M_2$ alors par induction $x : \sigma, \Gamma \vdash M_1 : \rho \to \tau$ et $x : \sigma, \Gamma \vdash M_1 : \rho$ et $\Gamma \vdash [x].M_1 : \sigma \to \rho \to \tau$ et $\Gamma \vdash [x].M_2 : \sigma \to \rho$. On prend $\mathsf{S} : (\sigma \to \rho \to \tau) \to (\sigma \to \rho) \to \sigma \to \tau$. Par conséquent $\Gamma \vdash \mathsf{S}\ [x].M_1\ [x].M_2 : \sigma \to \tau$. C. Q. F. D.
- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv x$ alors $\Gamma \vdash \mathsf{I} : \sigma \to \sigma$.

Réduction

$$\boxed{([x].M)\ N \xrightarrow[CL]{} M[x := N]}$$

Démonstration: Par induction sur la définition de $[x].M$.

- si $x \notin FV(M)$ alors

$$\begin{aligned} ([x].M)\ N &\equiv \mathsf{K}\ M\ N \\ &= M = M[x := N]. \end{aligned}$$

- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv x$ alors $[x].M \equiv I$ et $([x].M)\ N = N = x[x := N]$.

Réduction

$$\boxed{([x].M)\ N \xrightarrow[CL]{} M[x := N]}$$

- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv M_1\ M_2$ alors par induction

$$\begin{array}{rcl} ([x].M_1\ M_2)\ N & = & \mathsf{S}\ ([x].M_1)\ ([x].M_2)\ N \\ & \xrightarrow[CL]{} & (([x].M_1)\ N)\ (([x].M_2)\ N) \\ & = & M_1[x := N]\ M_2[x := N] \\ & = & (M_1\ M_2)[x := N]. \end{array}$$

Des λ-termes vers les CL-termes

On peut donner une interprétation $[\![\_]\!]_{CL}$ des lambda-termes vers les CL-termes.

$$\begin{aligned}
[\![\lambda x.M]\!]_{CL} &= [x].[\![M]\!]_{CL} \\
[\![M_1\ M_2]\!]_{CL} &= [\![M_1]\!]_{CL}\ [\![M_2]\!]_{CL} \\
[\![x]\!]_{CL} &= x
\end{aligned}$$

On a $M \xrightarrow[\beta]{} N$ implique $[\![M]\!]_{CL} \xrightarrow[CL]{} [\![N]\!]_{CL}$.

Des λ-termes vers les CL-termes

Cette interprétation préserve les types.

Autrement dit si M est le terme de preuve de σ dans la déduction naturelle de la logique propositionnelle intuitionniste

alors $[\![M]\!]_\lambda$ est terme de preuve de σ dans la logique propositionnelle intuitionniste à la Hilbert.

Des λ-termes vers les CL-termes

La taille de $[\![M]\!]_{CL}$ est en $O(3^n)$ où n est la taille de M.

Clairement, $[\![[\![M]\!]_\lambda]\!]_{CL}$ n'est pas en général égal à M.