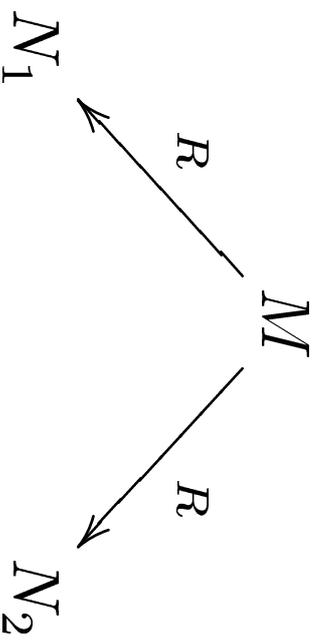


# ***Confluence du lambda-calcul***

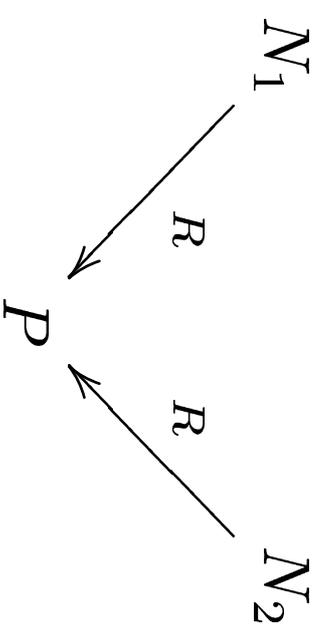
*version du 6 novembre 2002 – 15h 38*

# Propriété du losange

---

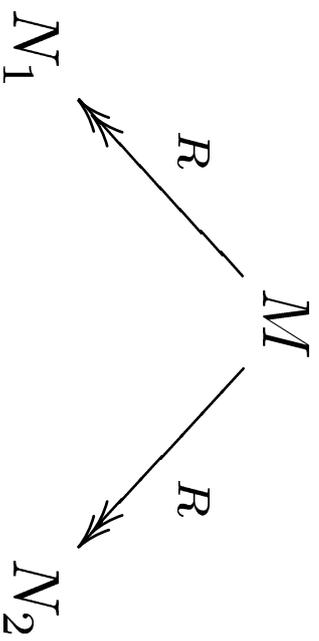


$\Rightarrow \exists P$

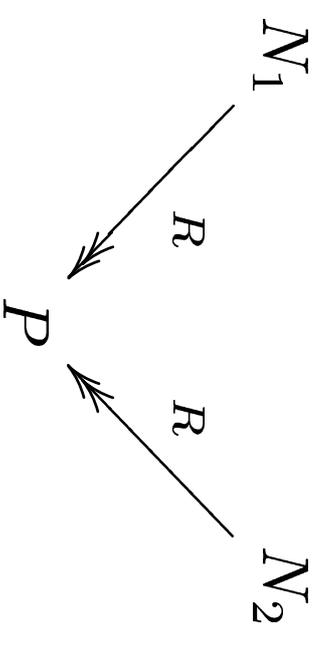


# Confluence

---



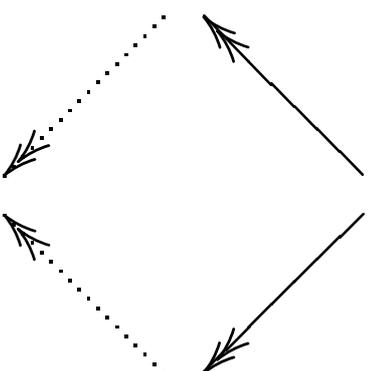
$\Rightarrow \exists P$



## Remarques

---

1.  $\xrightarrow{R}$  est confluent si  $\xrightarrow{R}$  a la propriété du losange.
2. Parfois on note la confluence :



où  $\xrightarrow{\dots}$  est un flèche existentielle.

# Confluence et convertibilité

---

Théorème (Church-Rosser) :

Si  $R$  est **confluente** alors

$$M \begin{array}{c} \leftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array} N \iff \exists P (M \xrightarrow{R} P \wedge N \xrightarrow{R} P).$$

Si  $R$  est **confluente** alors

$$M \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array} N \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array} \exists P(M \xrightarrow{R} P \wedge N \xrightarrow{R} P).$$

**Démonstration :**  $\longleftarrow \rightleftharpoons$  est évident car  $\xrightarrow{R} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array} \subseteq \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array}$  et

$\begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array}$  est symétrique et transitive.

Si  $R$  est **confluente** alors

$$M \begin{array}{c} \leftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array} N \iff \exists P (M \xrightarrow{R} P \wedge N \xrightarrow{R} P).$$

**Démonstration :**  $\implies$ . Par induction sur le nombre de « pics » dans

$$M \begin{array}{c} \leftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array} N. \text{ Soit}$$

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{+} \\ \xleftarrow{R} \end{array} M_1 \xrightarrow{+} N_1 \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{+} \\ \xleftarrow{R} \end{array} M_i \xrightarrow{+} N_i \dots \\ \dots N_{n-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{+} \\ \xleftarrow{R} \end{array} M_n \xrightarrow{+} N_n \begin{array}{c} \xrightarrow{+} \\ \xleftarrow{R} \end{array} N$$

– si  $n = 0$  alors  $M \begin{array}{c} \leftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array} N$  ou  $M \xrightarrow{R} N$ .

Si  $R$  est **confluente** alors

$$M \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array} N \iff \exists P (M \xrightarrow{R} P \wedge N \xrightarrow{R} P).$$

**Démonstration :**  $\implies$ .

– si  $n \neq 0$ , par confluence, dans

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{+} \\ \longleftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array} M_1 \xrightarrow{+} N_1 \dots N_{n-1} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{R} \end{array} M_n \xrightarrow{+} N_n \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{R} \end{array} N$$

il existe  $M'_n$  tel que  $N_{n-1} \xrightarrow{+} M'_n \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{R} \end{array} N_n \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{R} \end{array} N$   
 et

$$M \begin{array}{c} \xrightarrow{+} \\ \longleftarrow \\ \xrightarrow{R} \end{array} M_1 \xrightarrow{+} N_1 \dots \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{R} \end{array} M_i \xrightarrow{+} N_1 \dots \\ \dots N_{n-1} \xrightarrow{+} M'_n \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{R} \end{array} N_n \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{R} \end{array} N$$

a un pic de moins, donc on a le résultat par induction.

# Confluence et convertibilité

---

**Corollaire :** Si  $R$  est confluente

1. Si  $M$  est une forme normale de  $M$  alors  $M \xrightarrow{R} N$ .
2. Un terme a au plus une forme normale.

# Confluence de $\rightarrow_{\beta}$

---

Théorème :

$\rightarrow_{\beta}$  est confluent

## Remarques préliminaires

- Si  $\xrightarrow{R}$  a la propriété du losange, alors  $\xrightarrow{R}$  a la propriété du losange.
- $\xrightarrow{\beta}$  n'a pas la propriété du losange. Pourquoi ?
- Il faut donc trouver une relation  $\dashv\vdash$  telle que
  - o  $\dashv\vdash$  a la propriété du losange,
  - o  $\dashv\vdash = \xrightarrow{\beta}$ ,
  - + donc  $\xrightarrow{\beta}$  a la propriété du losange,
  - + ce qui signifie que  $\xrightarrow{\beta}$  est confluente.

## Lemme de substitution

Si  $x \notin FV(L)$  alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Si  $x \notin FV(L)$  alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

**Démonstration :** Par induction sur la structure de  $M$ .

**M est une variable**

- $M \equiv x$ , les deux côtés valent  $N[y := L]$ ,
- $M \equiv y$ , les deux côtés valent  $L$ ,
- $M \equiv z$ , les deux côtés valent  $z$ ,

Si  $x \notin FV(L)$  alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

**Démonstration :** Par induction sur la structure de  $M$ .

**$M$  est une abstraction  $M \equiv \lambda z.M_1$ .**

$$\begin{aligned} M[x := N][y := L] &\equiv (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] \\ &\equiv \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) \quad (\text{par définition}) \\ &\equiv \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) \quad (\text{par induction}) \\ &\equiv (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] \quad (\text{par définition}) \end{aligned}$$

**$M$  est une application facile.**

# Définition de la réduction parallèle

---

$$\text{(réflexivité)} \quad M \multimap M$$

$$\text{(APP-congruence)} \quad \frac{M \multimap M' \quad N \multimap N'}{MN \multimap M'N'}$$

$$\text{(ABS-congruence)} \quad \frac{M \multimap M'}{\lambda x. M \multimap \lambda x. M'}$$

$$\text{(\beta-parallèle)} \quad \frac{M \multimap M' \quad N \multimap N'}{(\lambda x. M)N \multimap M'[x := N']}$$

## Trois résultats

---

1. Si  $M \xrightarrow{\beta} M'$  alors  $M \dashv\vdash N'$

c'est-à-dire  $\xrightarrow{\beta} \subseteq \dashv\vdash$

2. Si  $M \dashv\vdash M'$  alors  $M \xrightarrow{\beta} M'$

c'est-à-dire  $\dashv\vdash \subseteq \xrightarrow{\beta}$

3. Si  $M \dashv\vdash M'$  et  $N \dashv\vdash N'$  alors

$M[x := N] \dashv\vdash M'[x := N']$

En exercice.

## Une propriété plus forte

---

On prouve une propriété **plus forte** (due à M. Takahashi)  
que la **propriété du losange** pour  $\dashv\vdash$  :

$$M \dashv\vdash N \iff N \dashv\vdash M^* \quad (*)$$

où  $M^*$  est un terme déterminé par  $M$  mais **indépendant** de  $N$ .

## Une propriété plus forte

---

On prouve une propriété **plus forte**

que la **propriété du losange** pour  $\dashv\vdash$  :

$$M \dashv\vdash N \implies N \dashv\vdash M^* \quad (*)$$

où  $M^*$  est un terme déterminé par  $M$  mais **indépendant** de  $N$ .

**Intuitivement**  $M^*$  est le terme obtenu à partir de  $M$  en contractant tous ses redex simultanément.

## Le définition de $M^*$

---

1.  $x^* \equiv x$
2.  $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3.  $(M_1 M_2)^* \equiv M_1^* M_2^*$  si  $M_1 M_2$  n'est pas un redex.
4.  $((\lambda x.M_1) M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

# Exercices

---

Calculus

1.  $((\lambda x.x) ((\lambda yz u.y (z u)) abc))^*$
2.  $((\lambda x.x x) (\lambda y.y y))^*$

$$M \dashrightarrow N \iff N \dashrightarrow M^* .$$

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition  $M^*$  sont laissés en exercice.

$$M \not\equiv \rightarrow N \implies N \not\equiv \rightarrow M^* .$$

Si  $M \equiv ((\lambda x. M_1) M_2) \not\equiv \rightarrow N$ , alors **deux cas** pour  $N$ ,

- $N \equiv (\lambda x. N_1) N_2$
- $N \equiv N_1[x := N_2]$

dans les deux cas, il y a des  $N_i$  ( $i=1$  ou  $i=2$ ) tels que  $M_i \not\equiv \rightarrow N_i$ .

Par induction,  $N_i \not\equiv \rightarrow M_i^*$ .

Pour chaque cas :

- Si  $N \equiv (\lambda x. N_1) N_2$  alors  $N \not\equiv \rightarrow M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$ .
- Si  $N \equiv N_1[x := N_2]$ , alors nous avons  
 $N \not\equiv \rightarrow M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$ , par le résultat 3.

## Résumons

---

De la propriété (\*) pour  $\longrightarrow$

on déduit la propriété du losange pour  $\longrightarrow$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour  $\longrightarrow$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour  $\longrightarrow$

parce que  $\xrightarrow{\beta} = \longrightarrow$  ,

qui est la confluence de  $\xrightarrow{\beta}$  .

Donc  $\xrightarrow{\beta}$  est confluent.

C.q.f.d.