Confluence du lambda-calcul

version du 6 novembre 2002 – 15 h 38

Propriété du losange

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, "R"] & & N_2 \arrow[dl, "R"'] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Confluence

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, ->>, "R"'] \arrow[dr, ->>, "R"] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, ->>, "R"] & & N_2 \arrow[dl, ->>, "R"'] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Remarques

1. $\xrightarrow[R]{}$ est confluente si $\overset{*}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}}$ a la propriété du losange.

2. Parfois on note la confluence :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
{} \arrow[dr, dotted, two heads] & & {} \arrow[dl, dotted, two heads] \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

où $\dashrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow$ est un flèche existentielle.

Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser) :

Si R est confluente alors

$$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \iff \exists P (M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).$$

Si R est confluente alors

$$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \Longleftrightarrow \exists P (M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).$$

Démonstration : $\Longleftarrow$ est évident car $\underset{R}{\twoheadrightarrow} \subseteq \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ et $\underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow}$ est symétrique et transitive.

Si R est confluente alors

$$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \Longleftrightarrow \exists P (M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).$$

Démonstration : $\Longrightarrow$. Par induction sur le nombre de «pics» dans $M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N$. Soit

$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots$$

$$\ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

– si $n = 0$ alors $M \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ ou $M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N$.

Si R est confluente alors

$$M \underset{R}{\twoheadleftarrow\!\!\twoheadrightarrow} N \Longleftrightarrow \exists P (M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\twoheadrightarrow P \wedge N \xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\twoheadrightarrow P).$$

Démonstration : $\Longrightarrow$.

– si $n \neq 0$, par confluence, dans

$$M \xleftarrow[R]{+} M_1 \xrightarrow[R]{+} N_1 \dots N_{n-1} \xleftarrow[R]{+} M_n \xrightarrow[R]{+} N_n \xleftarrow[R]{} N$$

il existe M'_n tel que $N_{n-1} \xrightarrow[R]{+} M'_n \xleftarrow[R]{+} N_n \xleftarrow[R]{} N$

et

$$M \xleftarrow[R]{+} M_1 \xrightarrow[R]{+} N_1 \dots \xleftarrow[R]{+} M_i \xrightarrow[R]{+} N_1 \dots$$

$$\dots N_{n-1} \xrightarrow[R]{+} M'_n \xleftarrow[R]{+} N_n \xleftarrow[R]{} N$$

a un pic de moins, donc on a le résultat par induction.

Confluence et convertibilité

Corollaire : Si R est confluente

1. Si N est une forme normale de M alors $M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\!\rightarrow N$.
2. Un terme a au plus une forme normale.

Confluence de $\rightarrow_\beta$

Théorème :

$$\boxed{\xrightarrow[\beta]{} \text{ est confluent}}$$

Remarques préliminaires

- Si $\xrightarrow[R]{}$ a la propriété du losange, alors $\xrightarrow[R]{}\!\!\!\!\!\rightarrow$ a la propriété du losange.
- $\xrightarrow[\beta]{}$ n'a pas la propriété du losange. Pourquoi ?
- Il faut donc trouver une relation $\mathrel{\rightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\;\|\;\;}$ telle que
  - o $\mathrel{\rightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\;\|\;\;}$ a la propriété du losange,
  - o $\mathrel{\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\;\|\;\;} = \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow$,
    - \+ donc $\xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\rightarrow$ a la propriété du losange,
    - \+ ce qui signifie que $\xrightarrow[\beta]{}$ est confluente.

Lemme de substitution

Si $x \notin FV(L)$ alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Si $x \notin FV(L)$ alors

$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

Démonstration : Par induction sur la structure de M.

M est une variable

- $M \equiv x$, les deux côtés valent $N[y := L]$,
- $M \equiv y$, les deux côtés valent L,
- $M \equiv z$, les deux côtés valent z,

Si $x \notin FV(L)$ alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Démonstration : Par induction sur la structure de M.

M est une abstraction $M \equiv \lambda z.M_1$.

$$\begin{aligned}
M[x := N][y := L] &\equiv (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] \\
&\equiv \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) \quad \text{(par définition)} \\
&\equiv \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) \quad \text{(par induction)} \\
&\equiv (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] \quad \text{(par définition)}
\end{aligned}$$

M est une application facile.

Définition de la réduction parallèle

(réflexivité) $$M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;\;\; M$$

(APP-congruence) $$\frac{M \;\Rrightarrow\; M' \qquad N \;\Rrightarrow\; N'}{M\,N \;\Rrightarrow\; M'\,N'}$$

(ABS-congruence) $$\frac{M \;\Rrightarrow\; M'}{\lambda x.M \;\Rrightarrow\; \lambda x.M'}$$

(β-parallèle) $$\frac{M \;\Rrightarrow\; M' \qquad N \;\Rrightarrow\; N'}{(\lambda x.M)\,N \;\Rrightarrow\; M'[x := N']}$$

Trois résultats

1. Si $M \xrightarrow[\beta]{} M'$ alors $M \xrightarrow{\;\|\;} M'$

   c'est-à-dire $\xrightarrow[\beta]{} \;\subseteq\; \xrightarrow{\;\|\;}$

2. Si $M \xrightarrow{\;\|\;} M'$ alors $M \twoheadrightarrow_{\beta} M'$

   c'est-à-dire $\xrightarrow{\;\|\;} \;\subseteq\; \twoheadrightarrow_{\beta}$

3. Si $M \xrightarrow{\;\|\;} M'$ et $N \xrightarrow{\;\|\;} N'$ alors

   $$M[x := N] \xrightarrow{\;\|\;} M'[x := N']$$

En exercice.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte (due à M. Takahashi)

que la propriété du losange pour $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!\|\;\;\;\;\;$:

$$M \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\;\;\;\; N \Longrightarrow N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\|\;\;\;\; M^* \qquad (*)$$

où M^* est un terme déterminé par M mais indépendant de N.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte

que la propriété du losange pour $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\quad$:

$$M \;\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\quad N \Longrightarrow N \;\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\quad M^* \qquad (*)$$

où M^* est un terme déterminé par M mais indépendant de N.

Intuitivement M^* est le terme obtenu à partir de M en contractant tous ses redex simultanément.

Le définition de M^*

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1 M_2)^* \equiv M_1^* M_2^*$ si $M_1 M_2$ n'est pas un redex.
4. $((\lambda x.M_1)M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

Exercices

Calculer

1. $((\lambda x.x)\ ((\lambda yzu.y\ (z\ u))\ abc))^*$
2. $((\lambda x.x\ x)\ (\lambda y.y\ y))^*$

$$\boxed{M \;\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\; N \Longrightarrow N \;\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\; M^*.}$$

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition M^* sont laissés en exercice.

$$\boxed{M \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; N \Longrightarrow N \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; M^*.}$$

Si $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; N$, alors deux cas pour N,

- $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$
- $N \equiv N_1[x := N_2]$

dans les deux cas, il y a des N_i (i=1 ou i=2) tels que $M_i \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; N_i$.

Par induction, $N_i \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; M_i^*$.

Pour chaque cas :

- Si $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$ alors $N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$.
- Si $N \equiv N_1[x := N_2]$,alors nous avons $N \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;\; M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$, par le résultat 3.

Résumons

De la propriété (*) pour $\;\not\!\!\!\!\not\longrightarrow$

on déduit la propriété du losange pour $\;\not\!\!\!\!\not\longrightarrow$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour $\;\not\!\!\!\!\not\twoheadrightarrow$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$

parce que $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \;=\; \not\!\!\!\!\not\twoheadrightarrow$,

qui est la confluence de $\underset{\beta}{\longrightarrow}$.

Donc $\underset{\beta}{\longrightarrow}$ est confluent.

C.q.f.d.