Lambda-calcul simplement typé

version du 20 janvier 2003 – 10 h 07

Le paradoxe du barbier

$\Omega \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$ et $\mathsf{Y} \equiv \lambda f.(\lambda x f(xx))\,(\lambda x f(xx))$ contiennent des termes qui s'appliquent à eux-mêmes.

Le paradoxe du barbier est :

> Le barbier rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes.
>
> Qui rase le barbier ?

Pour éviter les paradoxes, on cherche à éviter de tels termes.

On va donc typer les termes.

Typer est aussi bien pour la programmation.

Les objectifs du typage

Le typage a donc deux objectifs :

– préserver la correction, rien de mauvais ne peut arriver,

– préserver la terminaison, toutes les réductions se terminent.

En λ-calcul la terminaison s'appelle la normalisation forte.

Les environnements

Il faut typer les variables libres, il faut donc faire des hypothèses sur les types de ces variables.

D'où la notion d'environnement.

Un environnement est un ensemble d'association de types à des variables.

$$\Gamma \equiv x_1 : \sigma_1, ..., x_n : \sigma_n$$

Les types

Un jugement est l'affirmation du type σ d'un terme M sous un certain environnement Γ :

$$\Gamma \vdash M : \sigma$$

Les types sont

- soit des types de base o,
- soit des types applications $\sigma \to \tau$.

Les règles

(Var) $\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$

(Abs) $$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau}$$

(App) $$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

Exercices

Typez les termes

$B \equiv \lambda xyz.x(yz)$,

$I \equiv \lambda x.x$,

$C \equiv \lambda xyz.xzy$,

$K \equiv \lambda xy.x$,

$S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$.

Exercices (suite)

1. Typez $II \equiv (\lambda x.x)(\lambda x.x)$.
2. Typez **22** $\equiv (\lambda f x.f(f x))(\lambda f x.f(f x))$.
3. A-t-on le même type pour I (resp. **2**) dans chaque cas ?

Conclusion : Le système de types simples n'est pas assez général. Il ne permet d'affecter un type unique à chaque terme.

Si $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ et $\Gamma \vdash N : \sigma$ alors $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$

Démonstration : Par induction sur M.

Si $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ et $\Gamma \vdash N : \sigma$ alors $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$

Démonstration : Par induction sur M.

- Si $M \equiv y$ alors Γ contient $y : \tau$ et $M[x := N] \equiv M \equiv y$ donc le résultat qui est $\Gamma \vdash y : \tau$ est clair.

- Si $M \equiv x$ alors $\tau = \sigma$ et $M[x := N] \equiv N$ et le résultat est l'une des hypothèses.

Si $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ et $\Gamma \vdash N : \sigma$ alors $\Gamma \vdash M[x := N] : \tau$

Démonstration : Par induction sur M.

- Si $M \equiv P\, Q$ alors par (App) pour un certain τ', on a
  - $\Gamma, x : \sigma \vdash P : \tau' \to \tau$ duquel on tire par induction $\Gamma \vdash P[x := N] : \tau' \to \tau$
  - et $\Gamma, x : \sigma \vdash Q : \tau'$ duquel on tire par induction $\Gamma \vdash Q[x := N] : \tau'$.

  Donc par (App) $\Gamma \vdash (P\, Q)[x := N] : \tau$ puisque $(P\, Q)[x := N] \equiv P[x := N]\, Q[x := N]$.
- Le cas $M \equiv \lambda x.P$ est similaire.

Réduction du sujet

Lemme Réduction du sujet

La β-réduction préserve le type.

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si $M \xrightarrow[\beta]{} N$ alors $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si $M \xrightarrow[\beta]{} N$ alors $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Démonstration : Par induction sur la définition de $M \xrightarrow[\beta]{} N$.

- $M \equiv (\lambda x.M_1)M_2$

  $\Gamma \vdash (\lambda x.M_1)M_2 : \sigma$ vient de $\Gamma, x : \tau \vdash M_1 : \sigma$ et de $\Gamma \vdash M_2 : \tau$.

  D'autre part $N \equiv M_1[x := M_2]$

  or d'après le lemme $\Gamma \vdash M_1[x := M_2] : \sigma$.

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si $M \xrightarrow[\beta]{} N$ alors $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Démonstration : Par induction sur la définition de $M \xrightarrow[\beta]{} N$.

- $M \equiv (\lambda x.M_1)M_2$

  $\Gamma \vdash (\lambda x.M_1)M_2 : \sigma$ vient de $\Gamma, x : \tau \vdash M_1 : \sigma$ et de $\Gamma \vdash M_2 : \tau$.

  D'autre part $N \equiv M_1[x := M_2]$

  or d'après le lemme $\Gamma \vdash M_1[x := M_2] : \sigma$.

- $M \equiv M_1 M_2$ avec $N \equiv N_1 M_2$ et $M_1 \xrightarrow[\beta]{} N_1$.

  $\Gamma \vdash M$ vient de $\Gamma \vdash M_1 : \tau \to \sigma$ et $\Gamma \vdash M_2 : \tau$,

  par induction $\Gamma \vdash N_1 : \tau \to \sigma$ et donc $\Gamma \vdash N_1 M_2 : \sigma$.

Si $\Gamma \vdash M : \sigma$ et si $M \xrightarrow[\beta]{} N$ alors $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Démonstration : Par induction sur la définition de $M \xrightarrow[\beta]{} N$.

- $M \equiv (\lambda x.M_1)M_2$

  $\Gamma \vdash (\lambda x.M_1)M_2 : \sigma$ vient de $\Gamma, x : \tau \vdash M_1 : \sigma$ et de $\Gamma \vdash M_2 : \tau$.

  D'autre part $N \equiv M_1[x := M_2]$

  or d'après le lemme $\Gamma \vdash M_1[x := M_2] : \sigma$.
- $M \equiv M_1 M_2$ avec $N \equiv N_1 M_2$ et $M_1 \xrightarrow[\beta]{} N_1$.

  $\Gamma \vdash M$ vient de $\Gamma \vdash M_1 : \tau \to \sigma$ et $\Gamma \vdash M_2 : \tau$,

  par induction $\Gamma \vdash N_1 : \tau \to \sigma$ et donc $\Gamma \vdash N_1 M_2 : \sigma$.
- Les autres cas sont similaires.

Commentaires

- Si un terme est d'un certain type, il n'en sortira pas par β-réduction.
- Si un terme a une forme normale et s'il a un type, alors sa forme normale a ce type.

La correspondance de Curry-Howard

La mathématique c’est l’art de donner le même nom à des choses différentes.

Henri Poincaré

La correspondance de Curry-Howard

(Var) $\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$	$\Gamma, p \vdash p$
(Abs) $\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau}$	$\Rightarrow I \quad \dfrac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \Rightarrow q}$
(App) $\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau}$	$\Rightarrow E \quad \dfrac{\Gamma \vdash p \Rightarrow q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$

La correspondance de Curry-Howard

Dans $\Gamma \vdash M : \sigma$,

– M : est une annotation qui est le «terme de preuve»,

– σ peut-être vu comme un type ou comme une proposition.

La preuve de B

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash p \Rightarrow q \qquad \mathcal{D}}{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash q} \Rightarrow E}{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p) \vdash r \Rightarrow q}}{(p \Rightarrow q) \vdash (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q}}{\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\Rightarrow E\ \dfrac{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash r \Rightarrow p \qquad (p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash r}{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash p}$$

La preuve de B annotée

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Rightarrow E\quad \cfrac{x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p), z:r\vdash x:p\Rightarrow q \qquad \mathcal{D}}{x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p), z:r\vdash x\ (y\ z):q}}{x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p)\vdash \lambda z.x\ (y\ z):r\Rightarrow q}}{x:(p\Rightarrow q)\vdash \lambda yz.x\ (y\ z):(r\Rightarrow p)\Rightarrow r\Rightarrow q}}{\vdash \lambda xyz.x\ (y\ z):(p\Rightarrow q)\Rightarrow (r\Rightarrow p)\Rightarrow r\Rightarrow q}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\Rightarrow E\quad \cfrac{x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p), z:r\vdash y:r\Rightarrow p \qquad x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p), z:r\vdash z:r}{x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p), z:r\vdash y\ z:p}$$

La preuve de B annotée

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p), z:r\vdash x:p\Rightarrow q \qquad \mathcal{D}}{x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p), z:r\vdash x\ (y\ z):q}\Rightarrow E}{x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p)\vdash \lambda z.x\ (y\ z):r\Rightarrow q}}{x:(p\Rightarrow q)\vdash \lambda yz.x\ (y\ z):(r\Rightarrow p)\Rightarrow r\Rightarrow q}}{\vdash \lambda xyz.x\ (y\ z):(p\Rightarrow q)\Rightarrow (r\Rightarrow p)\Rightarrow r\Rightarrow q}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\dfrac{x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p), z:r\vdash y:r\Rightarrow p \qquad x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p), z:r\vdash z:r}{x:(p\Rightarrow q),\ y:(r\Rightarrow p), z:r\vdash y\ z:p}\Rightarrow E$$

La preuve du lemme B est le terme B !

Simplification de preuves

La preuve

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p \Rightarrow p), q \vdash p \Rightarrow p}{(p \Rightarrow p) \vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}\,(\Rightarrow I)}{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p}\,(\Rightarrow I) \qquad \dfrac{p \vdash p}{\vdash p \Rightarrow p}\,(\Rightarrow I)}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}\,(\Rightarrow E)$$

peut être réduite

Simplification de preuves

En effet, on fait une introduction immédiatement suivie d'une élimination :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p \Rightarrow p), q \vdash p \Rightarrow p}{(p \Rightarrow p) \vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}\,(\Rightarrow I)}{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p}\,(\Rightarrow I) \qquad \dfrac{p \vdash p}{\vdash p \Rightarrow p}\,(\Rightarrow I)}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}\,(\Rightarrow E)$$

On peut obtenir une preuve de $\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p$ à partir de la preuve de $(p \Rightarrow p) \vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p$.

Pour cela, il suffit de remplacer chaque occurrence de l'utilisation de l'hypothèse $(p \Rightarrow p)$ par sa preuve.

Simplification de preuves

En utilisant cette remarque

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p \Rightarrow p), q \vdash p \Rightarrow p}{(p \Rightarrow p) \vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}(\Rightarrow I)}{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p}(\Rightarrow I) \qquad \dfrac{p \vdash p}{\vdash p \Rightarrow p}(\Rightarrow I)}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}(\Rightarrow E)$$

donne

$$\dfrac{\dfrac{q, p \vdash p}{q \vdash p \Rightarrow p}(\Rightarrow I)}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}(\Rightarrow I)$$

Simplification de preuves

Donc avec les annotations par les termes de preuve

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : (p \Rightarrow p), y : q \vdash p \Rightarrow p}{x : (p \Rightarrow p) \vdash \lambda y.x : q \Rightarrow p \Rightarrow p}\,(Abs)}{\vdash \lambda xy.x : (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p}\,(Abs) \qquad \dfrac{z : p \vdash z : p}{\vdash \lambda z.z : p \Rightarrow p}\,(Abs)}{\vdash (\lambda xy.x)\,(\lambda z.z) : q \Rightarrow p \Rightarrow p}\,(App)$$

donne

$$\dfrac{\dfrac{y : q, z : p \vdash p}{y : q \vdash \lambda z.z : p \Rightarrow p}\,(Abs)}{\vdash \lambda yz.z : q \Rightarrow p \Rightarrow p}\,(Abs)$$

Simplification de preuves

Donc avec les annotations par les termes de preuve

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : (p \Rightarrow p), y : q \vdash p \Rightarrow p}{x : (p \Rightarrow p) \vdash \lambda y.x : q \Rightarrow p \Rightarrow p}(Abs)}{\vdash \lambda xy.x : (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p}(Abs) \qquad \dfrac{z : p \vdash z : p}{\vdash \lambda z.z : p \Rightarrow p}(Abs)}{\vdash (\lambda xy.x)\ (\lambda z.z) : q \Rightarrow p \Rightarrow p}(App)$$

donne

$$\dfrac{\dfrac{y : q, z : p \vdash p}{y : q \vdash \lambda z.z : p \Rightarrow p}(Abs)}{\vdash (\lambda y.x)[x := \lambda z.z] \equiv \lambda yz.z : q \Rightarrow p \Rightarrow p}(Abs)$$

La β-réduction correspond à la simplification des preuves.

Simplification de preuves

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{\varphi, \Gamma \vdash \psi}}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi}\,(\Rightarrow I) \qquad \dfrac{\mathcal{D}'}{\Gamma \vdash \varphi}}{\Gamma \vdash \psi}\,(\Rightarrow E)$$

se transforme en

$$\dfrac{\mathcal{D}''}{\Gamma \vdash \psi}$$

$\mathcal{D}''$ est la preuve $\mathcal{D}$ dans laquelle toutes les utilisations de l'hypothèse φ sont remplacées par la preuve $\mathcal{D}$ de φ.

Simplification de preuves

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{x : \varphi, \Gamma \vdash M : \psi}}{\Gamma \vdash (\lambda x.M) : \varphi \Rightarrow \psi}(Abs) \qquad \dfrac{\mathcal{D}'}{\Gamma \vdash N : \varphi}}{\Gamma \vdash (\lambda x.M)\ N : \psi}(App)$$

se transforme en

$$\dfrac{\mathcal{D}''}{\Gamma \vdash M[x := N] : \psi}$$

$\mathcal{D}''$ est la preuve $\mathcal{D}$ (qui se note M) dans laquelle toutes les utilisations de l'hypothèse $x : \varphi$ sont remplacées par la preuve $\mathcal{D}$ de φ (qui se note N).

La correspondance complète de Curry-Howard

On obtient le tableau de correspondance :

types	propositions
termes	preuves
réduction	simplification des preuves

Forte normalisation

Terminaision de la simplification ?

Est-ce que le processus de simplification de preuves se termine ?

Autrement dit est-ce que ce processsus est vraiment un processsus de simplifiction.

Normalisation forte

Définition : Un terme M est fortement normalisable si toute suite de réductions $M \xrightarrow[\beta]{} M_1 \xrightarrow[\beta]{} \dots \xrightarrow[\beta]{} M_n \dots$ est finie.

Théorème : Si $\Gamma \vdash M : \tau$ alors M est fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration), 1er lemme

Lemme : Si A, B et $\vec{C}$ sont fortement normalisables

et $AB\vec{C}$ n'est pas fortement normalisable

alors il y a un D tel que

1. $A \xrightarrow[\beta]{} \!\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda x.D$
2. $D[x := B]\vec{C}$ n'est pas fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration), 1$^{\text{er}}$ lemme

Démonstration :

Puisque A, B et $\vec{C}$ sont fortement normalisables, la réduction infinie qui part de $AB\vec{C}$ est de la forme

$$AB\vec{C} \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} (\lambda x.D)B_1\vec{C_1} \underset{\beta}{\longrightarrow} D[x := B_1]\vec{C_1} \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} \ldots$$

Mézalors le résultat vient immédiatement du fait que

$$D[x := B]\vec{C} \underset{\beta}{\twoheadrightarrow} D[x := B_1]\vec{C_1}.$$

Normalisation forte (démonstration), 1er lemme

Remettons le lemme à l'endroit.

Lemme : Si A, B et $\vec{C}$ sont fortement normalisables

et s'il y a un D tel que

1. $A \xrightarrow[\beta]{} \!\!\!\!\!\!\rightarrow \lambda x.D$

2. $D[x := B]\vec{C}$ est fortement normalisable.

alors $AB\vec{C}$ est fortement normalisable

Normalisation forte (démonstration), 2ème lemme

Lemme : Si M et P sont typés

et si M et P sont fortement normalisables,

alors $M[x := P]$ est fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration), 2ème lemme

Démonstration :

Par induction sur le triplet $(type(P), h(M), taille(M))$, où

- où $type(P)$ est la complexité du type de P,
- $h(M)$ (ou hauteur) est la longueur de la plus longue réduction qui commence en M,
- $taille(M)$ est la taille de M.

Normalisation forte (démonstration), 2ème lemme

– $M = \lambda y.N$, clairement $h(M) = h(N)$, mais $taille(M)\rangle taille(N)$. On applique l'induction.
  Donc $N[x := P]$ est fortement normalisable, donc $M[x := P] \equiv \lambda N[x := P]$ est fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration), 2ème lemme

– $y\vec{R}$, les réductions ont lieu dans les R_i, donc clairement $h(M) \geq h(R_i)$, et $taille(M)\rangle taille(R_i)$.
  On applique l'induction à chacun des R_i, on conclut que chaque $R_i[x := P]$ est fortement normalisable, donc $y...R_i[x := P]...$ est fortement normalisable, mais comme

$$y...R_i[x := P]... \equiv (y\vec{R})[x := P].$$

Par conséquent, $(y\vec{R})[x := P]$ est aussi fortement normalisable

Normalisation forte (démonstration), 2ème lemme

– $M = (\lambda y.L)Q\vec{R}$

Par induction, $L[x := P]$, $Q[x := P]$ et $\vec{R}[x := P]$ sont fortement normalisables.

Posons $D \equiv L[y := Q]\ \vec{R}$.

Si on veut utiliser le lemme précédent, il suffit de montrer que

$$L[x := P][y := Q[x := P]]\ \vec{R}[x := P] \equiv D[x := P]$$

est fortement normalisable .

Or $h(D)\langle h(M)$ donc par induction $D[x := P]$ est fortement normalisable. On peut appliquer le lemme.

Et donc par le lemme, $M[x := P]$ est fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration), 2ème lemme

- $M = xL\vec{Q}$

  On veut démontrer que $P\ L[x := P]\ \vec{Q}[x := P]$ est fortement normalisable.

  Par induction, $L' \equiv L[x := P]$ et $\vec{Q}' \equiv \vec{Q}[x := P]$ sont fortement normalisables.

  Si on veut utiliser le lemme précédent, il suffit de montrer que si $P \xrightarrow[\beta]{} \!\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \lambda y.P_1$ alors $M' \equiv P_1[y := L']\vec{Q}'$ est fortement normalisable.

  Remarquons que cela nous indique que $type(x) = type(P) = type(\lambda y.P_1) = \sigma \rightarrow \tau$.

Normalisation forte (démonstration), 2ème lemme

– $M = xL\vec{Q}$ (suite)

Puisque $\sigma = type(L) = type(L')\langle type(P)$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction et donc $P_1[y := L']$ est fortement normalisable.

Parce que $\tau = type(P_1[y := L'])\langle type(P)$, on conclut par induction, que $M' \equiv (z\vec{Q}')[z := P_1[y := L']]$ est fortement normalisable

Ainsi on peut appliquer le deuxième lemme et conclure que $M[x := P]$ est fortement normalisable.

Normalisation forte (démonstration)

Théorème : Si $\Gamma \vdash M : \tau$ alors M est fortement normalisable.

Le théorème est prouvé par induction structurelle sur le terme dont on cherche à prouver la normalisation forte.

– Le terme est une variable ou une abstraction c'est clair.

– Le terme est une application $P\,Q$

alors on utilise une astuce en disant que

$$P\,Q \equiv (zQ)[z := P]$$

ça devient évident par le 2ème lemme dont les hypothèses proviennent de l'induction structurelle.

En effet si Q est fortement normalisable alors $z\,Q$ est fortement normalisable.

Les autres connecteurs

Le $\&$ et le produit cartésien

Le $\&$ s'interprète bien calculatoirement en ajoutant des opérateurs de produit cartésien.

Le constructeur de paires : $\langle \_, \_ \rangle$,

Les destructeurs ou projections : π^1 et π^2.

Le $\&$ et le produit cartésien

Les règles de typage

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi^1\, M : \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi^2\, M : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau}$$

correspond clairement à deux règles d'éliminations du $\&$ et à la règle d'introduction du $\&$.

Le $\&$ et le produit cartésien

On a deux règles de réduction

$$\begin{array}{rcl} \pi^1 \langle M, N \rangle & \rightarrow & M \\ \pi^2 \langle M, N \rangle & \rightarrow & N \end{array}$$

qui correspondent à la simplication de preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash M : \sigma} \qquad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau}}{\Gamma \vdash \pi^1 \langle M, N \rangle : \sigma} \quad \rightarrow \quad \dfrac{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash M : \sigma}$$

et la simplification symétrique.

Le $\vee$ et la somme

Le $\vee$ s'interprète comme la structure de données somme.

Les deux constructeurs : in_1 et in_2,

Le destructeur ou discriminateur : $case \quad of \quad in \quad or \quad .$

un peu le **match** de CAML.

Le $\vee$ et la somme

Les règles de typage sont

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{in}_1\ M : \sigma \vee \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{in}_2\ M : \sigma \vee \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash P : \rho \qquad \Gamma, x : \tau \vdash Q : \rho}{\Gamma \vdash case\ M\ of\ x\ in\ P\ or\ Q : \rho}$$

Elles correspondent aux règles d'introduction du $\vee$ et à la règle d'élimination du $\vee$.

Le $\vee$ et la somme

On a les règles de réduction

$$\begin{array}{lcl} case\ (\mathsf{in}_1\ M)\ of\ x\ in\ P\ or\ Q & \rightarrow & P[x := M] \\ case\ (\mathsf{in}_2\ M)\ of\ x\ in\ P\ or\ Q & \rightarrow & Q[x := M] \end{array}$$

qui correspond à la simplication de preuve.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{D}'}{\Gamma \vdash M : s}}{\Gamma \vdash \mathsf{in}_1\ M : s \vee \tau} \quad \dfrac{\mathcal{D}}{\Gamma, x : \sigma \vdash P : \rho} \quad \Gamma, x : \tau \vdash Q : \rho}{case\ M\ of\ x\ in\ P\ or\ Q : \rho} \quad \rightarrow \quad \dfrac{\mathcal{D}\{\mathcal{D}'/\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma\}}{\Gamma \vdash P : \rho}$$