La logique propositionnelle (deduction naturelle)

version du 16 octobre 2002 – 17 h 14

En déduction naturelle, on raisonne avec des hypothèses.

Au lieu du jugement $\vdash p$, on utilise le jugement $\Gamma \vdash p$ où

- Γ est un ensemble de propositions qui sont les hypothèses ou antécédent.
- On écrit $\Gamma, p \vdash q$ au lieu de $\Gamma \cup \{p\} \vdash q$

  et $\vdash p$ quand l'ensemble des hypothèses est vide.
- $\Gamma \vdash p$ se lit
  - "de Γ on déduit p"
  - ou "Γ infère p" ou "Γ induit p"
  - ou "sous les hypothèses Γ on a p".

Les théorèmes

Les théorèmes sont les jugements de la forme $\vdash p$ qui peuvent être déduits des axiomes et des règles.

On les trouvent donc à la racine d’un arbre de preuve.

La logique propositionnelle minimale

L’axiome

Il n’y a qu’un seul axiome,

$$\Gamma, p \vdash p$$

Les règles

Il y a deux règles : introduction et élimination :

$$\Rightarrow I \quad \frac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \Rightarrow q}$$

$$\Rightarrow E \quad \frac{\Gamma \vdash p \Rightarrow q \qquad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}$$

Preuve de Hilbert_K

$$
\Rightarrow I \quad \dfrac{\Rightarrow I \quad \dfrac{p, q \vdash p}{p \vdash q \Rightarrow p}}{\vdash p \Rightarrow q \Rightarrow p}
$$

Exercice

1. Prouver $Hilbert\_S$.
2. Prouver $B : (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q$.

La preuve de B

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash p \Rightarrow q \qquad \mathcal{D}}{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash q} \Rightarrow E}{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p) \vdash r \Rightarrow q}}{(p \Rightarrow q) \vdash (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q}}{\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q}
$$

où $\mathcal{D}$ est

$$
\Rightarrow E \ \dfrac{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash r \Rightarrow p \qquad (p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash r}{(p \Rightarrow q),\ (r \Rightarrow p), r \vdash p}
$$

La présentation à la Prawitz

Prawiz donne une autre vision de la déduction naturelle.

Dans son approche on dispose les hypothèse aux feuilles en même temps que les axiomes.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_1}{\cdots}\quad\dfrac{axiom_1}{\cdots}}{}\,(foo_1)\qquad \dfrac{\dfrac{axiom_2}{\cdots}}{\cdots}\,(bar)}{\cdots}\,(foo_2)\qquad\dfrac{h_2}{\cdots}}{\Gamma\vdash p}\,(foo_1)$$

La présentation à la Prawitz

A certains moments dans la preuve on remplace des jugements $\Gamma \vdash p$ par $\Gamma \vdash h \Rightarrow p$ et on coche l'hypothèse comme ayant été utilisée. On dit que l'on décharge l'hypothèse.

La preuve de B dans la présentation à la Prawitz

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{h : p \Rightarrow q \qquad \dfrac{h' : r \Rightarrow p \qquad h'' : r}{p}}{q}\,h''}{\dfrac{r \Rightarrow q}{(r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q}\,h'}}{(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q}\,h
$$

En rouge, j'ai noté les hypothèses quand elles sont créées et en mauve quand elles ont été déchargées.

La preuve de B dans la présentation à la Prawitz

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{h} : p \Rightarrow q \qquad \dfrac{\cancel{h}' : r \Rightarrow p \qquad \cancel{h}'' : r}{p}}{q}}{r \Rightarrow q}\,h''}{(r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q}\,h'}{(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow r \Rightarrow q}\,h$$

On coche les hypothèses pour s'assurer qu'elles ont bien toutes été déchargées.

Des preuves à la Hilbert aux preuves en déduction naturelle

On remplace les invocations de Hilbert_K et Hilbert_S.

Les preuves sont plus longues, ainsi la preuve de $q \Rightarrow p \Rightarrow p$ est

$$\dfrac{\dfrac{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}{q \vdash p \Rightarrow p}}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}$$

Alors que la preuve déduite de la preuve à la Hilbert est

$$\dfrac{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p \qquad \dfrac{\mathcal{D} \qquad \vdash p \Rightarrow p \Rightarrow p}{\vdash p \Rightarrow p}}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\dfrac{\vdash (p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow p \Rightarrow p) \Rightarrow p \Rightarrow p \qquad \vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \Rightarrow p}{\vdash (p \Rightarrow p \Rightarrow p) \Rightarrow p \Rightarrow p}$$

Alors que la preuve déduite de la preuve à la Hilbert est

$$\dfrac{\vdash (p \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow p \qquad \dfrac{\mathcal{D} \qquad \vdash p \Rightarrow p \Rightarrow p}{\vdash p \Rightarrow p}}{\vdash q \Rightarrow p \Rightarrow p}$$

où $\mathcal{D}$ est

$$\dfrac{\vdash (p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow p \Rightarrow p) \Rightarrow p \Rightarrow p \qquad \vdash p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \Rightarrow p}{\vdash (p \Rightarrow p \Rightarrow p) \Rightarrow p \Rightarrow p}$$

que l'on prolonge par les preuves des feuilles.

La logique propositionnelle

Les règles

Les règles sont deux types :

– règles d’introduction : un connecteur qui n’était pas présent apparaît dans la proposition conséquente sous la barre d’inférence.

– règles d’élimination : la proposition conséquente sous la barre d’inférence est construite en enlevant le connecteur principal d’un des connecteurs conséquents d’un jugement au dessus de la barre.

La syntaxe

Il y a trois nouveaux connecteurs $\perp$, $\&$ et $\vee$.

– $\perp$ est unaire et représente l'absurde,
– $\&$ et $\vee$ sont bien connus et représentent la conjonction et la disjonction.

L'axiome pour $\perp$

Il n'y a qu'une règle et c'est une règle d'élimination :

$$\perp E \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash p}$$

Les règles du $\&$

Il y a une règle d’introduction et deux règles d’élimination.

Les règles du $\&$

Il y a une règle d'introduction et deux règles d'élimination.

$$\&\, I \quad \frac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \,\&\, q}$$

$$\&\, E_g \quad \frac{\Gamma \vdash p \,\&\, q}{\Gamma \vdash p} \qquad\qquad \&\, E_d \quad \frac{\Gamma \vdash p \,\&\, q}{\Gamma \vdash q}$$

Les règles du $\vee$

Il y a deux règles d'introduction et une règle d'élimination.

Les règles du $\vee$

Il y a deux règles d'introduction et une règle d'élimination.

$$\vee I_g \quad \frac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q} \qquad\qquad \vee I_d \quad \frac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$$

$$\vee E \quad \frac{\Gamma \vdash p \vee q \qquad \Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma \vdash r}$$