Le Calcul des Prédicats

version du 18 décembre 2002 – 12 h 09

Les structures

Structures

Une structure est un triplet $\mathfrak{A} = \langle A, \mathbf{P}, \mathbf{F}, \{c_i \in I\} \rangle$ où

- A est un ensemble non vide (le support ou l'univers de la structure),
- $\mathbf{P}$ est un n-uple $P_1, ..., P_n$ de prédicats,
- $\mathbf{F}$ est un m-uple $F_1, ..., F_m$ de fonctions totales,
- les c_i sont des éléments de A (les constantes).

Exemples

- $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, ^{-1}, 0, 1 \rangle$ est le corps des réels,
- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ est l'ensemble ordonné des naturels.

Le type de similarité

Le type de similarité d'une structure $\mathfrak{A} = \langle A, P_1, ...P_n, F_1, ..., F_n, \{c_i \in I\}\rangle$ est la suite $\langle r_1, ..., r_n; a_1, ..., a_m, \kappa\rangle$ où

- $R_i \subseteq A^{r_i}$,
- $F_j : A^{a_j} \to A$,
- $\kappa = |\{c_i \in I\}|$ (le cardinal de I).

Chaque structure contient la relation binaire d'identité qui est notée $=$.

Exemples

- $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, ^{-1}, 0, 1 \rangle$ a pour type de similarité $\langle -; 2, 2, 1; 2 \rangle$,
- $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ a pour type de similarité $\langle 2; -; 0 \rangle$.

La syntaxe

La syntaxe 1/2

Supposons que l'on a un langage de type de similarité $\langle r_1, ..., r_n; a_1, ..., a_m, \kappa \rangle$.

Les entités syntaxiques sont

1. les symboles de prédicats $P_1, \ldots, P_n, Q, R, \doteq$,
2. les symboles de fonctions $f_1, \ldots, f_m$,
3. les symboles de constantes $\bar{c}_i$ pour $i \in I$,
4. les variables $x_0, x_1, x_2, \ldots$
5. les connecteurs $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \bot, \forall, \exists$

La syntaxe 2/2

Les termes sont

$$t, t' \quad ::= \quad \bar{c}_i \mid x_j \mid f(t, ..., t)$$

Les formules sont

$$\begin{aligned} \varphi, \psi \quad ::= \quad & \perp \mid P(t, \ldots, t) \mid t \doteq t' \\ & \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid \varphi \Leftrightarrow \psi \mid \neg\varphi \mid (\forall x_i)\varphi \mid (\exists x_i)\varphi \end{aligned}$$

La syntaxe 2/2

Les termes sont

$$t, t' \quad ::= \quad \bar{c}_i \mid x_j \mid f(t, \ldots, t)$$

Les formules sont

$$\begin{aligned} \varphi, \psi \quad ::= \quad & \bot \mid P(t, \ldots, t) \mid t \doteq t' \qquad \text{Les atomes} \\ & \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid \varphi \Leftrightarrow \psi \mid \neg\varphi \mid (\forall x_i)\varphi \mid (\exists x_i)\varphi \end{aligned}$$

La syntaxe 3/2

Les notions de variables libres, de variables liées, de formules closes sont les mêmes qu'en lambda-calcul, sauf qu'ici les lieurs sont $\forall$ et $\exists$

Les formules closes sont appelées des sentences.

Parenthèses et priorités

Les conventions sur les parenthèses sont les suivantes.

- On omet les parenthèses les plus externes.
- On enlève les parenthèses dans les négations.
- $\vee$ et $\wedge$ ont priorité sur $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.
- $\neg$ a priorité sur tout autre opérateur.
- On enlève les parenthèses autour des quantifications $\forall x$ et $\exists x$ chaque fois que c'est possible.
- Les quantificateurs ont priorité sur tous les connecteurs logiques.
- On fusionne les listes de quantificateurs identiques $\exists x_1 x_2 \forall x_3 x_4 x_5 \varphi$ au lieu de $\exists x_1 \exists x_2 \forall x_3 \forall x_4 \forall x_5 \varphi$.

Le cas du signe $=$

On peut vouloir utiliser le symbole $=$ à la fois dans la théorie est la métathéorie. Pour faire la différence on emploie souvent

- $\equiv$ pour l'égalité syntaxique des expressions dans la métathéorie,
- $=$ comme symbole d'égalité dans la structure.
- et $\doteq$ comme symbole d'égalité du langage de la métathéorie,

Nous accepterons l'utilisation de $=$ à la place de $\doteq$ quand il n'y aura pas de confusion possible.

Substitutions de termes dans les termes

- $x[x := t] = t$
- $y[x := t] = y$
- $\bar{c}[x := t] = \bar{c}$
- $f(t_1, ..., t_p)[x := t] = f(t_1[x := t], ..., t_p[x := t]$)

Substitutions de termes dans les formules

On applique la convention de Barendregt

- $\perp[x := t] \quad = \quad \perp$
- $P[x := t] \quad = \quad P$
- $(t_1 \doteq t_2)[x := t] \quad = \quad (t_1[x := t] \doteq t_2[x := t]$
- $P(t_1, ..., t_p)[x := t] \quad = \quad P(t_1[x := t], ..., t_p[x := t])$
- $(\varphi \Box \gamma)[x := t] \quad = \quad \varphi[x := t] \Box \gamma[x := t]$
- $(\neg\varphi)[x := t] \quad = \quad \neg(\varphi[x := t])$
- $(\forall y \varphi)[x := t] \quad = \quad \forall y(\varphi[x := t])$
- $(\exists y \varphi)[x := t] \quad = \quad \exists y(\varphi[x := t])$

Convention

Parfois pour mettre en évidence que x peut apparaître dans φ on écrit $\varphi(x)$.

Alors au lieu de $\varphi(x)[x := t]$ on écrit alors $\varphi(t)$.

Le langage étendu

Le langage étendu $L(\mathfrak{A})$ de $\mathfrak{A}$ est obtenu en ajoutant au langage L du type de similarité de $\mathfrak{A}$ des symboles de constantes pour tous les éléments de A (le support de $\mathfrak{A}$).

Substitutions de formules dans les formules

Pas difficile !

La sémantique

Un exemple

Considérons la structure $\mathfrak{Z} = \langle \mathbb{Z}, <, +, -, 0 \rangle$.

Le langage a son alphabet

– des symboles de prédicats $\dot{=}, L$,

– des symboles de fonctions P, M,

– des symboles de constantes $\overline{0}$.

$L(\mathfrak{Z})$ contient de plus un symbole de constante $\overline{m}$ pour chaque $m \in \mathbb{Z}$.

Interprétation des termes dans $\mathfrak{Z}$

L'interprétation $t^{\mathfrak{Z}}$ de chaque terme t de $L(\mathfrak{Z})$ est un élément de $\mathbb{Z}$.

t	$t^{\mathfrak{Z}}$
$\overline{m}$	m
$P(t_1, t_2)$	$t_1^{\mathfrak{Z}} + t_2^{\mathfrak{Z}}$
$M(t)$	$-t^{\mathfrak{Z}}$

Grosso modo, on interprète

- m par «son nombre»,
- P par plus
- et M par moins.

Interprétation des sentences dans $\mathfrak{Z}$

$$
\begin{aligned}
[\![\bot]\!]_{\mathfrak{Z}} &= 0 \\
[\![t \doteq s]\!]_{\mathfrak{Z}} &= \begin{cases} 1 \text{ si } t^{\mathfrak{Z}} = s^{\mathfrak{Z}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
[\![L(t,s)]\!]_{\mathfrak{Z}} &= \begin{cases} 1 \text{ si } t^{\mathfrak{Z}} < s^{\mathfrak{Z}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi \wedge \psi]\!]_{\mathfrak{Z}} &= min([\![\varphi]\!]_{\mathfrak{Z}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{Z}}) \\
[\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathfrak{Z}} &= max([\![\varphi]\!]_{\mathfrak{Z}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{Z}}) \\
[\![\varphi \Box \psi]\!]_{\mathfrak{Z}} &= \textit{(comme d'habitude)} \\
[\![\forall x \varphi]\!]_{\mathfrak{Z}} &= min\{[\![\varphi[x := \overline{n}]]\!]_{\mathfrak{Z}} \mid n \in \mathbb{Z}\} \\
[\![\exists x \varphi]\!]_{\mathfrak{Z}} &= max\{[\![\varphi[x := \overline{n}]]\!]_{\mathfrak{Z}} \mid n \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

Interprétation des sentences dans $\mathfrak{Z}$

On voit que $[\![\forall x \varphi]\!]_{\mathfrak{A}}$ prend la valeur 1 si toutes les instances de $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}$ prennent la valeur 1.

C'est une généralisation de $\wedge$.

De même $[\![\exists x \varphi]\!]_{\mathfrak{A}}$ est une généralisation de $\vee$.

Quand il n'y aura pas de confusion on écrira $[\![\varphi]\!]$ au lieu de $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}$.

Interprétation des termes

Considérons $\mathfrak{A} = \langle A, P_1, ...P_n, F_1, ..., F_m, \{c_i \in I\}\rangle$ de type de similarité $\langle r_1, ..., r_n; a_1, ..., a_m, |I|\rangle$

On définit la fonction $(\cdot)^{\mathfrak{A}}$: $\text{termes}_{\mathfrak{A}} \to A$

$$\begin{aligned} \bar{c}_i^{\mathfrak{A}} &= c_i \\ \overline{a}^{\mathfrak{A}} &= a \\ (\overline{F_i}(t_1, ...t_p))^{\mathfrak{A}} &= F_i(t_1^{\mathfrak{A}}, ..., t_p^{\mathfrak{A}}). \end{aligned}$$

où $\overline{F_i}$ est le symbole correspondant à la fonction F_i et où $p = a_i$.

Interprétation des sentences

$$
\begin{aligned}
[\![\bot]\!]_{\mathfrak{A}} &= 0 \\
[\![\overline{R}]\!]_{\mathfrak{A}} &= R \\
[\![\overline{R_i}(t_1, ...t_p)]\!]_{\mathfrak{A}} &= \begin{cases} 1 \text{ si } \langle t_1^{\mathfrak{A}}, ..., t_p^{\mathfrak{A}} \rangle \in R_i & \text{où } p = r_i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
[\![t_1 \doteq t_2]\!]_{\mathfrak{A}} &= \begin{cases} 1 \text{ si } t_1^{\mathfrak{A}} = t_2^{\mathfrak{A}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Interprétation des sentences

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi \wedge \psi]\!]_{\mathfrak{A}} &= min([\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}) \\
[\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathfrak{A}} &= max([\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}) \\
[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!]_{\mathfrak{A}} &= max(1 - [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}) \\
[\![\varphi \Leftrightarrow \psi]\!]_{\mathfrak{A}} &= \begin{cases} 1 \text{ si } [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}} = [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\
[\![\neg\varphi]\!]_{\mathfrak{A}} &= 1 - [\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}
\end{aligned}
$$

Interprétation des sentences

$$\begin{aligned}
[\![\forall x \varphi]\!]_{\mathfrak{A}} &= min\{[\![\varphi[x := \overline{a}]]\!]_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\} \\
[\![\exists x \varphi]\!]_{\mathfrak{A}} &= max\{[\![\varphi[x := \overline{a}]]\!]_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\}
\end{aligned}$$

A partir de maintenant, nous supposerons que toutes les structures ont les mêmes types de similarité.

On écrira $\mathfrak{A} \models_K \varphi$ pour $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}} = 1$.

Cela se lira la structure $\mathfrak{A}$ valide la sentence φ

ou bien la sentence φ est valide dans la structure $\mathfrak{A}$

Interprétation des formules

Si $FV(\varphi) = \{z_1, ...z_k$, la clôture universelle de φ est

$$Cl(\varphi) = \forall z_1 ... z_k \varphi.$$

$\mathfrak{A} \models_K \varphi$ ssi $\mathfrak{A} \models_K Cl(\varphi)$.

Interprétation des formules

$\models_K \varphi$ ssi $\mathfrak{A} \models_K \varphi$ pour tout $\mathfrak{A}$ de type adéquat.

$\mathfrak{A} \models_K \Gamma$ ssi $\mathfrak{A} \models_K \psi$ pour tout $\psi \in \Gamma$,

$\Gamma \models_K \varphi$ ssi $\mathfrak{A} \models_K \Gamma$ implique $\mathfrak{A} \models_K \varphi$, si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ est constitué de sentences.

Interprétation des formules

Lemme :

$\mathfrak{A} \models_K \varphi \wedge \psi$ si et seulement si $\mathfrak{A} \models_K \varphi$ *et* $\mathfrak{A} \models_K \psi$

$\mathfrak{A} \models_K \varphi \vee \psi$ si et seulement si $\mathfrak{A} \models_K \varphi$ *ou* $\mathfrak{A} \models_K \psi$

$\mathfrak{A} \models_K \neg\varphi$ si et seulement si $\mathfrak{A} \not\models \varphi$

$\mathfrak{A} \models_K \varphi \Rightarrow \psi$ si et seulement si $\mathfrak{A} \models_K \varphi$ *implique* $\mathfrak{A} \models_K \psi$

$\mathfrak{A} \models_K \varphi \Leftrightarrow \psi$ si et seulement si $\mathfrak{A} \models_K \varphi$ *est équivalent à* $\models_K \psi$

$\mathfrak{A} \models_K \forall x\varphi$ si et seulement si $\mathfrak{A} \models_K \varphi[x := \overline{a}]$ *pour tout* $a \in A$.

$\mathfrak{A} \models_K \exists x\varphi$ si et seulement si $\mathfrak{A} \models_K \varphi[x := \overline{a}]$ *pour un* $a \in A$.

Interprétation des formules

Preuve du lemme : on le fait dans deux cas seulement.

$\mathfrak{A} \models_K \varphi \vee \psi$ équivaut à $max([\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}}, [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}}) = 1$ ce qui équivaut à ce que $[\![\varphi]\!]_{\mathfrak{A}} = 1$ ou $[\![\psi]\!]_{\mathfrak{A}} = 1$ ce qui équivaut donc à $\mathfrak{A} \models_K \varphi$ ou $\mathfrak{A} \models_K \psi$.

$\mathfrak{A} \models_K \forall x \varphi$ équivaut à $min\{[\![\varphi[x := \overline{a}]]\!]_{\mathfrak{A}} \mid a \in A\} = 1$ ce qui équivaut à ce que pour tout $a \in A$ on ait $[\![\varphi[x := \overline{a}]]\!]_{\mathfrak{A}} = 1$ ce qui revient donc à ce que pour tout $a \in A$ on ait $\mathfrak{A} \models_K \varphi[x := \overline{a}]$.

Quelques propriétés

Quantificateurs et négations

$\models_K \neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi$

$\models_K \neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

$\models_K \forall x\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$

$\models_K \exists x\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$

Permutation et oubli de quantificateurs

$\models_K \forall x \forall y \varphi \Leftrightarrow \forall y \forall x \varphi$

$\models_K \exists x \exists y \varphi \Leftrightarrow \exists y \exists x \varphi$

$\models_K \forall x \varphi \Leftrightarrow \varphi$ si $x \notin FV(\varphi)$

$\models_K \exists x \varphi \Leftrightarrow \varphi$ si $x \notin FV(\varphi)$

Formules prénexes

Une formule φ est en forme prénexe, on dit aussi que φ est prénexe, si φ consiste d'un suite (éventuellement vide) de quantificateurs suivie d'une formule sans quantificateurs.

Exemple : $(\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)P(y)$ n'est pas en forme prénexe, tandis que $(\exists y\ x)(P(x) \Rightarrow P(y))$ est en forme prénexe.

Formules en forme prénexe

Theorem : Pour chaque φ il existe une formule prénexe ψ telle que $\models_K \varphi \Leftrightarrow \psi$.

La déduction naturelle

Les règles

On ajoute à la logique propositionelle les règles

$$\frac{\Gamma \vdash_K \varphi(x)}{\Gamma \vdash_K \forall x \varphi(x)} \forall I \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash_K \forall x \varphi(x)}{\Gamma \vdash_K \varphi(t)} \forall E$$

Correction

Théorème : $\Gamma \vdash_K \varphi$ implique $\Gamma \models_K \varphi$.

Complétude

Théorème : $\Gamma \models_K \varphi$ implique $\Gamma \vdash_K \varphi$.

Autrement dit, la logique classique est complète pour les modèles à base de structures tel que nous venons de les présenter.

Complétude

Théorème : $\Gamma \models_K \varphi$ implique $\Gamma \vdash_K \varphi$.

Autrement dit, la logique classique est complète pour les modèles à base de structures tel que nous venons de les présenter.

Je fais l'impasse !

L’approche à la Hilbert

Les axiomes et les règles

On a deux axiomes

$$\frac{}{\vdash \forall x\, \varphi(x) \Rightarrow f(t)}\ \forall_1$$

$$\frac{}{\vdash (\forall x\, (\varphi \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \forall x\, \psi(x)}\ \forall_2 \quad x \notin FV(\varphi)$$

et une règle

$$\frac{\vdash \varphi(x)}{\vdash \forall x\, \varphi(x)}\ \forall I$$