Magistère d'Informatique et Modélisation

Corrigé de l'examen final de logique

2003

Exercice 1

Posons $\xi = \varphi \vee (\psi \vee \theta)$.

$$\dfrac{\dfrac{\xi \vdash \xi \qquad \dfrac{\dfrac{\xi, \varphi \vdash \varphi}{\xi, \varphi \vdash \psi \vee \varphi}}{\xi, \varphi \vdash \theta \vee (\psi \vee \varphi)}\,(I\vee) \qquad \dfrac{\xi, \psi \vee \theta \vdash \psi \vee \theta \qquad \dfrac{\dfrac{\xi, \psi \vee \theta, \psi \vdash \psi}{\xi, \psi \vee \theta, \psi \vdash \psi \vee \varphi}\,(I\vee)}{\xi, \psi \vee \theta, \psi \vdash \theta \vee (\psi \vee \varphi)}\,(I\vee) \qquad \dfrac{\xi, \psi \vee \theta, \theta \vdash \theta}{\xi, \psi \vee \theta, \theta \vdash \theta \vee (\psi \vee \varphi)}\,(I\vee)}{\xi, \psi \vee \theta \vdash \theta \vee (\psi \vee \varphi)}\,(E\vee)}{\xi \vdash \theta \vee (\psi \vee \varphi)}\,(E\vee)}{\vdash \xi \Rightarrow \theta \vee (\psi \vee \varphi)}\,(MP)$$

Exercice 3

1. Il y a deux preuves

$$\dfrac{\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \qquad \dfrac{\Box\varphi \qquad \dfrac{}{\Box\varphi \Rightarrow \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \Box\psi}\,(Distribution)}{\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \Box\psi}\,(MP)}{\Box\psi}\,(MP)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Box\varphi}{\varphi}\,(Generalisation) \qquad \dfrac{\Box(\varphi \Rightarrow \psi)}{\varphi \Rightarrow \psi}\,(Generalisation)}{\psi}\,(MP)}{\Box\psi}\,(Generalisation)$$

2. On a tout d'abord

$$\dfrac{\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\psi \qquad \dfrac{\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\varphi \qquad \dfrac{}{(\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\varphi) \Rightarrow (\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\psi) \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi}\,(Classique)}{(\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\psi) \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi}}{\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi}\,(MP)$$

On peut justifier $\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\varphi$ par l'arbre de preuve

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi}{\Box((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi)} \qquad \dfrac{\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \Box\varphi \qquad (\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \Box\varphi) \Rightarrow \Box((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\varphi}{\Box((\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\varphi}}{\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\varphi}$$

où les feuilles sont, quant à elles, justifiées par $(Classique)$, $(Distribution)$ et $(Classique)$. De son côté, $\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\psi$ a quasiment le même arbre de preuve.

3. La règle de forçage $\Vdash$ est définie par les quatre définitions classiques.
   (a) Si φ est une *variable* p : $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi $u \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$,
   (b) Si φ est une *conjonction* $\psi \wedge \theta$ $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$ et $\mathcal{M}, u \Vdash \theta$,
   (c) Si φ est une *disjonction* $\psi \vee \theta$ $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$ ou $\mathcal{M}, u \Vdash \theta$,
   (d) Si $\perp$ est l'*absurde*, alors $\mathcal{M}, u \nVdash \perp$,

   auxquelles on ajoute les deux définitions qui changent :
   (a) Si φ est une *implication* $\psi \Rightarrow \theta$ $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$ implique $\mathcal{M}, u \Vdash \theta$ (comme suggéré oralement),
   (b) Si φ est l'application d'une modalité $\Box\psi$: $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi [1] pour tout $v \geq_M u, \mathcal{M}, v \Vdash \psi$.

   On remarque qu'avec les définitions ci-dessus, la relation $\Vdash_{\mathcal{M}}$ n'est pas monotone, car l'ensemble $\{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \mid u \Vdash_{\mathcal{M}} \psi \Rightarrow \theta\}$ n'est pas «forcément» dirigé. Par exemple si $\mathcal{U}_{\mathcal{M}} = \{u_0, u_1, u_2\}$ avec $u_0 \leq_{\mathcal{M}} u_1 \leq_M u_2$ et si $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p) = \{u_1, u_2\}$ et $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}(q) = \{u_2\}$ on a $u_0 \Vdash_{\mathcal{M}} p \Rightarrow q$, puis $u_1 \nVdash p \Rightarrow q$ et $u_2 \Vdash_{\mathcal{M}} p \Rightarrow q$, autrement dit $\{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \mid u \Vdash_{\mathcal{M}} p \Rightarrow q\} = \{u_0, u_2\}$. C'est toute la différence entre l'interprétation de la logique classique et l'interprétation de la logique intuitionniste.

   On définit $\mathcal{M} \vDash \varphi$ si pour tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ on a $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ et on définit $\vDash \varphi$ si pour tout modèle $\mathcal{M}$ on a $\mathcal{M} \vDash \varphi$. Finalement cela signifie que $\vDash \varphi$ si pour tout modèle $\mathcal{M}$ et pour tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ on a $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$. Il faut vérifier pour chaque règle si les affirmations de la partie supérieure où on remplace $\vdash$ par $\vDash$ sont satisfaites, l'affirmation de la partie inférieure où on remplace $\vdash$ par $\vDash$ est satisfaite.
   - Pour la règle $(Classique)$[2], si φ est un théorème classique alors pour tout modèle $\mathcal{M}$ et pour tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ on a $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$ et donc par définition même $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$.
   - Pour la règle (MP), si $\vDash \varphi$ et si $\vDash \varphi \Rightarrow \psi$ cela signifie que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et pour tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ on a $u \Vdash \varphi$ et $u \Vdash \varphi \Rightarrow \psi$ donc $u \Vdash \psi$, ce qui implique par définition que $\vDash \psi$.
   - Pour la règle $(Generalisation)$, si $\vDash \varphi$ cela signifie que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et pour tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ on a $u \Vdash \varphi$, donc pour tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ et pour tout $u \leq v$ on $v \Vdash \varphi$, donc $u \Vdash \Box\varphi$ et donc $\vDash \Box\varphi$.
   - Pour la règle $(Distribution)$, il faut vérifier que quand on a $v \Vdash \varphi$ pour tout $v \geq u$, quand on a $v' \Vdash \varphi \Rightarrow \psi$ pour $v' \geq u$, on a alors $v'' \Vdash \psi$ pour tout $v'' \geq u$, ce qui semble aller de soi.
   - Pour la règle (T), il faut vérifier que quand on a $v \Vdash \varphi$ pour tout $v \geq u$, on a $u \Vdash \varphi$, ce qui est une conséquence de la réflexivité de $\geq$.

4. L'opérateur $\rightarrow$ correspond à l'implication intuitionniste, car on voit que dans les modèles de Kripke, il satisfait :
   - Si φ est $\psi \rightarrow \theta$ autrement dit $\Box(\psi \Rightarrow \theta)$: $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi pour tout $v \geq_M u, \mathcal{M}, v \Vdash \psi \Rightarrow \theta$ c'est-à-dire si $\mathcal{M}, v \Vdash \psi$ alors $\mathcal{M}, v \Vdash \theta$.

[1] On aurait pu prendre $\Box\psi$: $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ ssi ψ : $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$, mais ça n'aurait pas été vraiment dans l'esprit de l'exercice.
[2] Ce raisonnement n'aurait pas fonctionné avec l'interprétation «habituelle» de $\Rightarrow$.