Magistère d'Informatique et Modélisation

Examen final de logique

2003

Documents autorisés.
Dans les questions ouvertes, limitez votre réponse à au plus cinq lignes.

Exercice 1

Démontrer en déduction naturelle la proposition $\varphi \vee (\psi \vee \theta) \Rightarrow \theta \vee (\psi \vee \varphi)$.

Exercice 2

On ajoute au lambda calcul, deux opérateurs unaires **pr**$_1$, **pr**$_2$ et un opérateur quaternaire **case _ of _ in _ or _**. On a alors la syntaxe suivante :

$$M, N, P \quad ::= \quad x \mid \lambda x.M \mid M\ N \mid \mathbf{pr}_1\ M \mid \mathbf{pr}_2\ M \mid \mathbf{case}\ M\ \mathbf{of}\ x\ \mathbf{in}\ N\ \mathbf{or}\ P$$

où x est une variable quelconque qui peut aussi bien être y, z, x_0,..., x_{10}, ... On munit ce calcul des règles de typage du λ-calcul auxquelles on ajoute les trois règles suivantes.

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \mathbf{pr}_1\ M : \sigma \vee \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \mathbf{pr}_2\ M : \sigma \vee \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \vee \tau \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash P : \rho \qquad \Gamma, x : \tau \vdash Q : \rho}{\Gamma \vdash \mathbf{case}\ M\ \mathbf{of}\ x\ \mathbf{in}\ P\ \mathbf{or}\ Q : \rho}$$

1. A quelles règles de déduction en logique correspondent ces règles de typage ?
2. Un type τ est *habité* s'il existe un terme M de ce calcul tel que $\vdash M : \tau$. Montrer que le type $(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$ est habité.
3. Est-ce que le type $\varphi \vee (\varphi \to \psi)$ est habité ? Justifier votre réponse.
4. Donner une preuve en déduction naturelle de $\varphi \vee (\varphi \to \psi)$ (ici $\to$ note l'implication). Est-ce que cette preuve est intuitionniste ?

Exercice 3

On considère une logique enrichie d'un opérateur ; on dit une *modalité*. Cette modalité est notée $\Box$. $\Box\varphi$ se lit «toujours φ» ou «carré φ». On aurait pu la noter $K_0\varphi$ et la lire «l'agent 0 sait φ». La syntaxe de cette logique est

$$\varphi, \psi \quad ::= \quad p \mid \bot \mid \varphi \Rightarrow \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \wedge \psi \mid \Box\varphi$$

qui contient aussi les règles suivantes :

$$\frac{\vdash_K \varphi}{\vdash_M \varphi}\,(Classique) \qquad \frac{\vdash_M \varphi \qquad \vdash_M \varphi \Rightarrow \psi}{\vdash_M \psi}\,(MP) \qquad \frac{\vdash_M \varphi}{\vdash_M \Box\varphi}\,(Generalisation)$$

(où $\vdash_K \ \varphi$ signifie que φ est un théorème de la logique propositionnelle classique) et les axiomes suivants

$$\frac{}{\vdash_M \Box\varphi \Rightarrow \Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \Box\psi}\,(Distribution) \qquad \frac{}{\vdash_M \Box\varphi \Rightarrow \varphi}\,(T)$$

1. Montrer que la règle

   $$\frac{\vdash_M \Box\varphi \quad \vdash_M \Box(\varphi \Rightarrow \psi)}{\vdash_M \Box\psi}$$

   est dérivable dans ce système.
2. Démontrer $\Box(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$.
3. On considère les mêmes modèles de Kripke que la logique intuitionniste. Donner l'interprétation de la relation de forçage $\Vdash$, en particulier pour les propositions de la forme $\Box\varphi$ pour que les règles ci-dessus soient correctes.
4. On considère dans cette logique l'opérateur $\to$ défini par $\varphi \to \psi$ si et seulement si $\Box(\varphi \Rightarrow \psi)$. Que vous inspire cet opérateur ?