Licence d'Informatique fondamentale

Examen final de logique

Janvier 2005

Documents autorisés.
Dans les questions ouvertes, limitez votre réponse à au plus sept lignes..

Exercice

Soient φ, ψ et ρ des propositions quelconques. On considère la proposition $A \triangleq (\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \rho) \vee (\rho \Rightarrow \varphi)$.

1. Montrer que A est validé par le modèle $\{0, 1\}$.
2. Trouver un contre-modèle de Kripke de A.
3. Trouver une caractérisation des modèles de A. ayant un monde minimal.
4. Montrer (en logique intuitionniste) que $\neg\varphi \vee \varphi \vdash A$.
5. Soit $\Theta_1 \triangleq \{(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \rho) \vee (\rho \Rightarrow \varphi) \mid \varphi, \psi, \rho \text{ propositions}\}$. Montrer que pour α et β quelconques $\Theta_1 \vdash \alpha \Rightarrow \beta \vee \beta \Rightarrow \alpha$.
6. Soient $\Theta_0 \triangleq \{(\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\beta \Rightarrow \alpha) \mid \alpha, \beta \text{ propositions}\}$ et $\Gamma_0 \triangleq \{\neg\varphi \vee \varphi \mid \varphi \text{ proposition}\}$. On considère l'ensemble J des théorèmes de la logique propositionnelle intuitionniste, l'ensemble K des théorèmes de la logique propositionnelle classique, les ensembles $E \triangleq \{\gamma \mid \Gamma_0 \vdash \gamma\}$, $T_0 \triangleq \{\gamma \mid \Theta_0 \vdash \gamma\}$ et $T_1 \triangleq \{\gamma \mid \Theta_1 \vdash \gamma\}$. Quelles sont les relations d'inclusion entre ces ensembles ?

Problème *(Théorème de complétude de Friedman)*

On considère dans cette partie le λ-calcul simplement typé. Rappelons que les termes sont :

$$M, N, \ldots ::= x \mid \lambda x \cdot M \mid M\, N$$

et que les règles de typage sont :

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\,(Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma_1 \to \sigma_2 \quad \Gamma \vdash N : \sigma_1}{\Gamma \vdash M\, N : \sigma_2}\,(App) \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma_1 \vdash M : \sigma_2}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot M : \sigma_1 \to \sigma_2}\,(Abs)$$

Une *structure applicative standard* est engendrée par une famille d'ensembles E_b, pour tout type de base b. Dans la usite b note toujours un type de base. On définit alors E_σ pour tout type σ par récurrence structurelle sur σ comme suit :

- quand $\sigma \equiv b$, E_b est l'ensemble donné pour engendrer la structure applicative,
- et quand $\sigma \equiv \sigma_1 \to \sigma_2$, E_σ est l'ensemble de toutes les applications (c'est-à-dire fonctions totales) de E_{σ_1} vers E_{σ_2}.

Une *valuation* ρ est une fonction qui à chaque variable x associe un élément de $\bigcup_\sigma E_\sigma$.

Une valuation *respecte* un contexte de type $\Gamma \triangleq x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n$ si et seulement si $\rho(x_i) \in E_{\sigma_i}$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$.

On définit une interprétation, dite *standard*, des λ-termes simplement typés en interprétant l'application syntaxique du λ-calcul comme étant la véritable application des fonctions à leurs arguments. Formellement, pour tout contexte Γ, pour toute valuation ρ respectant Γ, pour toute dérivation de typage $\mathcal{D}$ de $\Gamma \vdash u : \sigma$, on définit $[\![\mathcal{D}]\!]\rho$ par récurrence structurelle sur $\mathcal{D}$:

$$\left[\!\!\left[\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\,(Var)\right]\!\!\right]\rho \quad \triangleq \quad \rho(x)$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\begin{array}{c}\vdots\,\mathcal{D}_1 \\ \Gamma \vdash M : \sigma_1 \to \sigma_2\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\,\mathcal{D}_2 \\ \Gamma \vdash N : \sigma_1\end{array}}{\Gamma \vdash M\,N : \sigma_2}\,(App)\right]\!\!\right]\rho \quad \triangleq \quad f(v)$$

où

$$f \triangleq \left[\!\!\left[\begin{array}{c}\vdots\,\mathcal{D}_1 \\ \Gamma \vdash M : \sigma_1 \to \sigma_2\end{array}\right]\!\!\right]\rho, \qquad v \triangleq \left[\!\!\left[\begin{array}{c}\vdots\,\mathcal{D}_2 \\ \Gamma \vdash N : \sigma_1\end{array}\right]\!\!\right]\rho$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\begin{array}{c}\vdots\,\mathcal{D}_1 \\ \Gamma, x : \sigma_1 \vdash M : \sigma_2\end{array}}{\Gamma \vdash \lambda x \cdot M : \sigma_1 \to \sigma_2}\,(Abs)\right]\!\!\right]\rho \quad \triangleq \quad g$$

où g est la fonction $E_{\sigma_1} \to E_{\sigma_2}$ définie par

$$N \quad \mapsto \quad \left[\!\!\left[\begin{array}{c}\vdots\,\mathcal{D}_1 \\ \Gamma, x : \sigma_1 \vdash M : \sigma_2\end{array}\right]\!\!\right](\rho[x := N])$$

$\rho(x := N)$ est la valuation égale à ρ sauf en x où elle vaut N. Par abus de langage, on résumera parfois une dérivation $\mathcal{D}$ de $\Gamma \vdash M : \sigma$ au seul jugement $\Gamma \vdash M : \sigma$, ce qui permettra d'écrire $[\![\Gamma \vdash x : \sigma]\!]\rho = \rho(x)$, $[\![\Gamma \vdash M\,N : \sigma_2]\!]\rho = [\![\Gamma \vdash M : \sigma_1 \to \sigma_2]\!]\rho([\![\Gamma \vdash N : \sigma_1]\!]\rho)$, $[\![\Gamma \vdash \lambda x \cdot M : \sigma_1 \to \sigma_2]\!]\rho = (a \mapsto [\![\Gamma, x : \sigma_1 \vdash M : \sigma_2]\!](\rho[x := a]))$.

Cette interprétation est *correcte* (voir question 3 pour (ii)), au sens où :

(i) si $\mathcal{D}$ dérive $\Gamma \vdash M : \sigma$, et si ρ respecte Γ, alors $[\![\mathcal{D}]\!]\rho$ est un élément de E_σ ;

(ii) si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux arbres de typages pour des termes $\beta\eta$-convertibles, alors $[\![\mathcal{D}]\!]\rho = [\![\mathcal{D}']\!]\rho$ pour tout ρ.

On va démontrer ici une forme de réciproque au point (ii). C'est un théorème de complétude dû à Harvey Friedman. La question est alors de trouver les bons E_b !

Pour ceci, on considère des familles de relations binaires R_σ indicées par des types σ. Informellement, pour chaque σ, R_σ est une relation entre termes d'une part et éléments de E_σ d'autre part. On notera $M\ R_\sigma\ a$ pour dire que M et a sont en relation par R_σ.

On dit que $R \triangleq (R_\sigma)_{\sigma \text{ type}}$ est une *relation logique* si et seulement si c'est une relation entre un λ-terme et une application qui d'une part est compatible avec la convertibilité, autrement dit $M =_{\beta\eta} N$ et $M\ R_\sigma\ a$ implique $N\ R_\sigma\ a$; et d'autre part satisfait :

pour tous types σ_1 et σ_2, pour tout terme M, pour tout $f \in E_{\sigma_1 \to \sigma_2}$,
$M\ R_{\sigma_1 \to \sigma_2}\ f$
si et seulement si
pour tout terme N, pour tout a in E_{σ_1} tels que $N\ R_{\sigma_1}\ a$, on a $(M\,N)\ R_{\sigma_2}\ f(a)$.

Plus succinctement, R est une relation logique si et seulement si

$$M\ R_\sigma\ a \wedge M =_{\beta\eta} N \quad \Rightarrow \quad N\ R_\sigma\ a \tag{1}$$
$$M\ R_{\sigma_1\to\sigma_2}\ f \quad \Leftrightarrow \quad (\forall N, a)\ N\ R_{\sigma_1}\ a \Rightarrow M\ N\ R_{\sigma_2}\ f(a) \tag{2}$$

(On remarquera la similarité avec la notion de «réductible».)

1. L'interprétation $[\![\vdash M : \sigma]\!]\rho$ pour un terme clos M ne dépend pas de la valuation ρ choisie. Pourquoi ? On écrit $[\![\vdash M : \sigma]\!]$ dans ce cas.
2. Que valent $[\![\vdash \lambda x{\cdot}x : b \to b]\!]$ et $[\![\vdash \lambda x{\cdot}x : (b \to b) \to b \to b]\!]$ ainsi que $[\![\vdash \lambda f{\cdot}\lambda x{\cdot}(f\ x) : (b \to b) \to b \to b]\!]$?
3. Montrer la condition (ii), ci-dessus.
4. Montrer que si $x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \vdash M : \sigma$ est dérivable, et si pour $1 \leq i \leq n$ on a $N_i\ R_{\sigma_i}\ a_i$ alors $M[x_1 := N_1, \ldots, x_n := N_n]\ R_\sigma\ [\![x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \vdash M]\!][x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]$.
   On note $[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n]$ la valuation envoyant chaque x_i vers a_i.
5. En déduire que si pour tout σ, R_σ est une relation *injective modulo* $\beta\eta$ (autrement dit $M\ R_\sigma\ a$ et $N\ R_\sigma\ a$ impliquent $M =_{\beta\eta} N$), alors pour tous termes clos M et N de même type σ, tels que $[\![\vdash M : \sigma]\!] = [\![\vdash N : \sigma]\!]$, on a en fait $M =_{\beta\eta} N$.
6. On note $[M]_\sigma$ l'ensemble des termes, de type σ, $\beta\eta$-convertibles à $\beta\eta$ à M. Pour tout type σ, posons Λ_σ l'ensemble de tels $[M]_\sigma$; formellement, $\Lambda_\sigma \triangleq \{[M]_\sigma \mid \vdash M : \sigma \text{ dérivable}\}$.
   On construit une interprétation standard $(E_\sigma)_{\sigma \text{ type}}$ en posant $E_b \triangleq \Lambda_b$ pour tout type de base b.
   On définit maintenant une famille de fonctions $r_\sigma : E_\sigma \to \Lambda_\sigma$ et $i_\sigma : \Lambda_\sigma \to E_\sigma$ par récurrence sur σ comme suit :

$$\begin{array}{rclrcl} r_b(a \in E_b) & \triangleq & a \in \Lambda_b & i_b([M]_b \in \Lambda_b) & \triangleq & [M]_b \in E_b \\ r_{\sigma\to\tau}(f \in E_{\sigma\to\tau}) & \triangleq & \lambda x \cdot r_\tau(f(i_\sigma([x]_\sigma))) & i_{\sigma\to\tau}([M]_{\sigma\to\tau} \in \Lambda_{\sigma\to\tau}) & \triangleq & (a \mapsto i_\tau([M]_{\sigma\to\tau}\ r_\sigma(a))) \end{array}$$

   où la notation $\lambda x \cdot [M]_\tau$ dénote $[\lambda x \cdot M]_{\sigma\to\tau}$ dans la définition de $r_{\sigma\to\tau}$ (x est une variable quelconque fixée de type σ), et où $[M]_{\sigma\to\tau}\ r_\sigma(a)$ (définition de $i_{\sigma\to\tau}$) dénote $[M\ N]_\tau$, en posant $[N]_\sigma \triangleq r_\sigma(a)$.

   (a) Que vaut $i_{b\to b}([\lambda x \cdot x])$?
   (b) Soit b un type de base, on considère la fonction f qui associe à tout élément dans $E_{b\to b}$ l'élément $[\lambda x \cdot x]_{b\to b}$. Que vaut $r_{(b\to b)\to b\to b}(f)$?
7. Montrer que (r_σ, i_σ) définit une *rétraction* de E_σ sur Λ_σ au sens où $r_\sigma \circ i_\sigma = \mathrm{id}_{\Lambda_\sigma}$.
8. On considère la relation logique $R^{[\,]}_\sigma$ définie par $M\ R^{[\,]}_b\ a$ si et seulement si $a = [M]_\sigma$.
   Donner un élément $a \in E_{b\to b}$ tel que $\lambda x.x\ R^{[\,]}_{b\to b}\ a$.
9. Montrer que $R^{[\,]}_\sigma$ satisfait :

$$i_\sigma([M_\sigma]) = f \quad \Rightarrow \quad M\ R^{[\,]}_\sigma\ f \tag{3}$$
$$M\ R^{[\,]}_\sigma\ f \quad \Rightarrow \quad [M]_\sigma = r_\sigma(f) \tag{4}$$

10. Montrer que si M et N sont des termes clos de même type σ et $[\![\vdash M : \sigma]\!] = [\![\vdash N : \sigma]\!]$ alors $r_\sigma([\![\vdash M : \sigma]\!]) = r_\sigma([\![\vdash N : \sigma]\!])$.
11. Déduire des questions précédentes qu'il existe une structure applicative standard dans laquelle pour tous termes M et N tels que $\Gamma \vdash M : \sigma$ et $\Gamma \vdash N : \sigma$ soient dérivables, $M =_{\beta\eta} N$ si et seulement si pour toute valuation ρ qui respecte Γ, $[\![\Gamma \vdash M : \sigma]\!]\rho = [\![\Gamma \vdash N : \sigma]\!]\rho$.

Merci à Jean Goubault-Larrecq pour avoir fortement inspiré cet énoncé.