La Logique propositionnelle classique

Pierre Lescanne

29 novembre 2004 – 15 h 59

En déduction naturelle

On ajoute la règle dite de **réduction par l'absurde.**

$$\frac{\Gamma, \neg p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p}\ \mathit{RAA}$$

Attention : il ne faut pas confondre cela avec

$$\frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg p}$$

qui est en fait :

$$\frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p \Rightarrow \bot}$$

Attention : il ne faut pas confondre cela avec

$$\frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg p}$$

qui est en fait :

$$\frac{\Gamma, p \vdash \bot}{\Gamma \vdash p \Rightarrow \bot}$$

On utilise le symbole $\vdash_{NK}$ si on veut bien préciser qu'il s'agit de la déduction en logique classique.

Exercice

Prouvez

1. $\neg\neg p \Rightarrow p$
2. $p \vee \neg p$
3. $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

Exercice 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg p, \neg p \vdash \neg\neg p \qquad \neg\neg p, \neg p \vdash \neg p}{\neg\neg p, \neg p \vdash \bot} \Rightarrow E}{\neg\neg p \vdash p} RAA}{\vdash \neg\neg p \Rightarrow p} \Rightarrow I$$

Exercice 2

$$
\dfrac{\neg(p\vee\neg p)\vdash\neg(p\vee\neg p) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(p\vee\neg p),p\vdash\neg(p\vee\neg p) \qquad \dfrac{\neg(p\vee\neg p),p\vdash p}{\neg(p\vee\neg p),p\vdash p\vee\neg p}\,\vee I}{\neg(p\vee\neg p),p\vdash\bot}\Rightarrow E}{\neg(p\vee\neg p)\vdash\neg p}\Rightarrow I}{\neg(p\vee\neg p)\vdash p\vee\neg p}\,\vee I}{\dfrac{\neg(p\vee\neg p)\vdash\bot}{\vdash p\vee\neg p}\,RAA}\Rightarrow E
$$

Exercice 3

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdash p \vee \neg p$}
\AxiomC{$p, q \vdash p$}
\RightLabel{$(\Rightarrow I)$}
\UnaryInfC{$p \vdash q \Rightarrow p$}
\RightLabel{$(\vee I_d)$}
\UnaryInfC{$p \vdash (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$}
\AxiomC{$\neg p, p \vdash \neg p$}
\AxiomC{$\neg p, p \vdash p$}
\RightLabel{$(\Rightarrow E)$}
\BinaryInfC{$\neg p, p \vdash \bot$}
\RightLabel{$(\bot)$}
\UnaryInfC{$\neg p, p \vdash q$}
\RightLabel{$(\Rightarrow I)$}
\UnaryInfC{$\neg p \vdash p \Rightarrow q$}
\RightLabel{$(\vee I_g)$}
\UnaryInfC{$\neg p \vdash (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$}
\RightLabel{$(\vee E)$}
\TrinaryInfC{$\vdash (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$}
\end{prooftree}
$$

Correction et complétude

Interprétation : une fonction de *proposition* vers $\langle \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; 0, 1, +, \cdot \rangle$,

- le support est $\{0, 1\}$,
- les opérations sont la somme et le produit modulo 2.

Les connecteurs sont interprétés ainsi:

- $v(p \Rightarrow q) = 1 + v(p) + v(p) \cdot v(q)$
- $v(p \vee q) = v(p) + v(q) + v(p) \cdot v(q)$
- $v(p \wedge q) = v(p) \cdot v(q)$
- $v(\bot) = 0$

$\Gamma \vDash_{NK} p$ signifie que si $v(q) = 1$ pour tout $q \in \Gamma$ alors $v(p) = 1$

Correction et complétude (fin)

La logique propositionnelle est **correcte**,
c'est-à-dire $\Gamma \vdash_{NK} p$ implique $\Gamma \vDash_{NK} p$

La logique propositionnelle est **complète**,
c'est-à-dire $\Gamma \vDash_{NK} p$ implique $\Gamma \vdash_{NK} p$