Introduction à la logique

Pierre Lescanne

29 novembre 2004 – 15 h 59

Quels sont les buts de la logique ?   1 / 4

- Pour tous
- Pour les mathématiciens
- Pour les informaticiens

Quels sont les buts de la logique ? *2 / 4*

Pour tous

- *Comprendre* la nature intime du raisonnement mathématique[1]
- Faire du «raisonnement» une **théorie mathématique** comme les autres.
- Donner un sens précis à ce que peut-être le **vrai**
  dès qu'il s'agit de raisonnement et d'argumentation.

[1] et du raisonnement non mathématique (philosophique, judiciaire) !

Quels sont les buts de la logique ? 3 / 4

Pour les mathématiciens

- S'assurer (se convaincre ?) que les mathématiques sont *exemptes de contradictions* et de paradoxes.
- *Apprendre* une branche des mathématiques.

Quels sont les buts de la logique ? 4 / 4

Pour les informaticiens

- *Mécaniser* les processus de raisonnement.
- *Exhiber les liens* entre démonstrations et calculs.
- *Formaliser* les objets informatiques,
  - pour la sûreté (par exemple, la ligne 14 du métro parisien),
  - et le sécurité.

Ce que la logique n'est pas

Point de vue personnel

- Le *fondement ultime* auquel se réduisent les mathématiques, (point de vue réductionniste)
  Des réductions sont possibles et utiles et la logique peut aider à en faire, mais il n'y pas de réduction ultime.
- La discipline qui va faire remplacer les humains (en général) et les mathématiciens (en particulier) par des machines (point de vue mécaniste).

La logique, une théorie mathématique

La logique est une théorie mathématique[2],

- elle *utilise les mathématiques* comme le font les autres branches des mathématiques,
- elle *étudie des sortes particulières d'objets mathématiques* : les propositions, les théorèmes, les jugements, les démonstrations, etc.

[2] comme les autres !

Un peu d'histoire 1 / 2

L'histoire montre que *tout ce qui est susceptible de se mathématiser se mathématise.*
Au début, seuls les **entiers** sont des êtres mathématiques.
Puis les Anciens acceptent les **rationnels**.
Au début du dix-neuvième siècle, les **relatifs** et les **complexes** (ou imaginaires) deviennent eux-aussi des êtres mathématiques.

Un peu d'histoire 2 / 2

Au dix-neuf siècle

- les **réels** (Dedekind),
- puis les **fonctions** (en «extension»)
- et les **ensembles** (Cantor) deviennent des êtres mathématiques.

Au début du vingtième siècle, les **fonctions** (en «intention») (Church et Curry) et les **théorèmes** (Boole, Frege etc.) deviennent des êtres mathématiques.
Aujourd'hui, les **démonstrations** (Curry, de Bruijn et Howard, 1980) deviennent des êtres mathématiques.

[3] Nous inisterons sur ce point de vue.

Un peu d'histoire 2 / 2

Au dix-neuf siècle

- les **réels** (Dedekind),
- puis les **fonctions** (en «extension»)
- et les **ensembles** (Cantor) deviennent des êtres mathématiques.

Au début du vingtième siècle, les **fonctions** (en «intention») (Church et Curry) et les **théorèmes** (Boole, Frege etc.) deviennent des êtres mathématiques.
Aujourd'hui, les **démonstrations** (Curry, de Bruijn et Howard, 1980) deviennent des êtres mathématiques.[3].

[3] Nous inisterons sur ce point de vue.

Mécaniser la logique ?

Deux positions s'affrontent.

- *Le mathématicien ne sera jamais battu par une machine* Alain Connes (le triangle de la pensée)
- *Il existe un théorème qui ne peut être prouvé que par un ordinateur* Veroff and McCune : Les algèbres de Boole peuvent être axiomatisées par l'axiome

  Axiome

  $$((x \mid z) \mid y) \mid ((x \mid (x \mid y)) \mid x) = y$$

  où est $\mid$ est le symbole de Sheffer qui peut être interprété comme

  $$x \mid y = \neg x \wedge \neg y$$

Mécaniser la logique ?

Deux positions s'affrontent.

- *Le mathématicien ne sera jamais battu par une machine* Alain Connes (le triangle de la pensée)
- *Il existe un théorème qui ne peut être prouvé que par un ordinateur* Veroff and McCune : Les algèbres de Boole peuvent être axiomatisées par l'axiome

  Axiome

  $$((x\,|\,z)\,|\,y)\ |\ ((x\ |\ (x\,|\,y))\,|\,x) = y$$

  où est $|$ est le symbole de Sheffer qui peut être interprété comme

  $$x\,|\,y = \neg x \wedge \neg y$$

  Est-ce un théorème profond ?

Mécaniser la logique ?

La démonstration complète du **théorème des quatre couleurs** vient d'être terminée par George Gonthier (septembre 2004) en utilisant l'assistant de preuve COQ.
La démonstration précédente était hybride:

- *démonstrations* et *vérifications humaines*
- et *utilisation de l'ordinateur* pour d'autres vérifications.

Mécaniser la logique ?

La démonstration complète du **théorème des quatre couleurs** vient d'être terminée par George Gonthier (septembre 2004) en utilisant l'assistant de preuve COQ.
La démonstration précédente était hybride:

- *démonstrations* et *vérifications humaines*
- et *utilisation de l'ordinateur* pour d'autres vérifications.

La démontrationde Gonthier est complètement mécanisée.

Mécaniser la logique ?

La démonstration complète de la **conjecture de Kepler** a suscité une polémique, car certaines parties n'ont pas pu être vérifiées par des humains.
Un programme de recherche décennal a été initié pour mener à bien une preuve complète assistée par ordinateur.

Modèles

Informellement, un **modèle** est une structure mathématique dans laquelle toutes les **règles de déduction** et les **axiomes** sont «**satisfaits**».

On dit qu'une formule est **valide** si elle est satisfaite dans tous les modèles.

Les deux niveaux de la logique 1 / 3

En logique, il y a deux niveaux qui interfèrent et qu'il ne faut pas confondre.

- La **théorie**, (on dit aussi parfois la **théorie objet**, si l'on veut être plus précis).
- La **méta-théorie**, c'est une mathématique dans laquelle on va raisonner sur l'objet. C'est aussi un système logique !

Les deux niveaux de la logique 2 / 3

Le **théorie objet** est l'objet logique que l'on étudie et que l'on souhaite donc formaliser.

En général, on accepte dans la **méta-théorie** toute la puissance du raisonnement traditionnel. Si elle est mécanisée, cela peut-être par un système formel plus ou moins puissant.

Les deux niveaux de la logique 3 / 3

Dans la méta-théorie, on prouve des **méta-théorèmes**, c-à-d des théorèmes à propos de la théorie objet.
Quelques méta-théorèmes courants sont :

- la **correction**,
- la **cohérence**,
- la **complétude**.

Les concepts méta-logiques

La **correction** est la capacité d'un système de preuve de pouvoir prouver *seulement* des théorèmes qui sont des formules valides.
La **cohérence** est la capacité d'un système de preuve d'être *absent de contradiction*, on ne peut pas prouver une propriété et son contraire.
La **complétude** est la capacité d'un système de preuve de pouvoir *prouver toutes les formules valides*.

La cohérence

Pour prouver la cohérence, autrement dit l’absence de contradiction, on exhibe un modèle.

Les ingrédients de la logique 1 / 7

Les aspects preuves

En logique on trouve :

- un **langage** d'expressions bien formées :
  - les **propositions** (construites avec des **connecteurs**),
  - les **jugements** ou **séquents**
  - etc.

  On dit aussi que c'est la **syntaxe**.
- des **règles** de déduction,
- des **axiomes**.

Les **règles de déduction** montrent comment *construire des théorèmes à partir d'autres théorèmes*. On définit dans la méta-théorie,

- des fonctions des propositions vers les propositions (règles monadiques),
- ou des fonctions des couples de propositions vers les propositions (règles dyadiques).

Les propositions à partir desquelles ont fait la déduction dans la règle s'appelle les **prémisses**. La proposition que l'on déduit s'appelle la **conséquence**.

Les **axiomes** affirment que *certaines propositions sont des théorèmes* : on définit le prédicat unaire «être un théorème» dans la méta-théorie et on affirme que les axiomes sont des formules qui satisfont ce prédicat.
N. B. Les axiomes sont en général vus comme des règles sans prémisses.

Le but des axiomes et des règles de déduction est de former des expressions particulières, les **théorèmes** en construisant des objets mathématiques particuliers les **démonstrations** (ou **preuves**).

Les **preuves** sont des **arbres** dont

- les **noeuds** sont les règles de déduction,
- les **feuilles** sont les axiomes
- et la **racine** est le théorème dont c'est la preuve.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cdots \qquad \cdots}{\cdots}\,(\mathit{foo}_1) \qquad \cfrac{\cdots}{\cdots}\,(\mathit{bar})}{\cdots}\,(\mathit{foo}_2) \qquad \cdots}{\Gamma \vdash \Delta}\,(\mathit{foo}_1)$$

Il y a différentes sortes d'objets : **propositions**[4], **théorèmes**, etc. Dans une logique, l'appartenance d'un objet à telle ou telle sorte se décrète par un **jugement**.

[4]qui ne sont pas théorèmes

Syntaxe concrète et syntaxe abstraite

Un ordinateur a besoin qu'on lui parle de la syntaxe à un bas niveau, c'est la **syntaxe concrète**, c-à-d les **virgules**, les **parenthèses**, les **retours à la ligne**, etc.
Un humain préfère une syntaxe lisible et flexible, il a besoin de la **syntaxe abstraite**, c-à-d plutôt la structure arborescente, donc il souhaite des **opérateurs infixes**, l'**associativité**.

Les ingrédients de la logique 7 / 7

Les aspects modèles

On interprète le langage dans les **modèles**. On parle aussi de **sémantique**.

Les propositions qui sont «satisfaites» (dans un sens à préciser) par le modèle sont dites **valides**.

Correction, cohérence et complétude établissent des liens entre

- les **théorèmes** (propositions prouvables)
- et les **tautologies** (propositions valides),

c'est-à-dire entre la **prouvabilité** et la **validité**.

Les deux grandes branches de la logique

La partie de la logique où l'on s'intéresse plutôt aux démonstrations s'appelle la la **théorie de la démonstration** ou théorie de la preuve (proof theory).
La partie de la logique où l'on s'intéresse plutôt à la validité s'appelle la **théorie des modèles**.

Bibliographie

Deux livres de base :

R. Lalement. *Logique, Réduction, Résolution. Études et recherches en informatique. Masson, Paris, 1990.*

R.David, K.Nour, C.Raffalli *Introduction à la logique - théorie de la démonstration. Dunod, 2001.*

Ma référence :

D. van Dalen. *Logic and Structure. Springer Verlag, 1994.*

Bibliographie (suite)

Un livre assez complet sur la logique de l'informatique en français :

P. Gochet, P. Gribomont. Logique. Volume 1 : méthodes pour l'informatique fondamentale. HERMES, 1990

Sur la logique épistémique :

R. Fagin, Y. Halpern, Y. Moses, and M. Y. Vardi. Reasoning about Knowledge The MIT Press, 1995.

Bibliographie (fin)

Sur la théorie des ensembles

Jean-Louis Krivine Théorie des ensembles. Eyrolles. (1998)

Page WEB :
http://perso.ens-lyon.fr/pierre.lescanne/
ENSEIGNEMENT/LOGIQUE/presentation.html
ou formation.ens-lyon.fr, groupe cours_informatiques

Le plan du cours

- L'**approche à la Hilbert** (essentiellement axiomatique),
- La **déduction naturelle** (essentiellement à base de règles),
- La **logique classique** (une logique moins «calculatoire»),
- Le **lambda calcul** («la théorie des fonctions»),
- Les **modèles** de la logique intuitionniste,
- Le **calcul des prédicats** (une logique avec quantificateurs)
- La **théorie des ensembles** (à nouveau une théorie axiomatique),

Une progression plus didactique que linéaire ou logique.