Les Modèles de Kripke

Pierre Lescanne

6 décembre 2004 – 10 h 15

Notations

À partir de maintenant, je note

1. les propositions $\varphi, \psi, \chi, \theta$ etc.
2. les variables propositionnelles p, q, r, s, t,
3. les environnements Γ, Θ, Σ

Les modèles de Kripke (cas général) 1 / 3

Un **modèle de Kripke** est un triplet $\mathcal{M} = (\mathcal{U}_{\mathcal{M}}, I_{\mathcal{M}}, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ où

- $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ est un ensemble dont les éléments sont appelés, suivant les auteurs,
  - des **mondes**,
  - des **mondes possibles**,
  - des **étapes (de raisonnement)**,
  - des **états**.

Les modèles de Kripke (cas général) 2 / 3

- $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}$: *Variables* $\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}_{\mathcal{M}})$. Intuitivement $\mathcal{I}_{\mathcal{M}}(p)$ est l'ensemble des mondes où la variable p est satisfaite.

Les mondes sont notés u, v, w.

Les modèles de Kripke (cas général) 3 / 3

- $\mathcal{R}_{\mathcal{M}} = (R_1, ..R_n)$ est un ensemble de relations dites **relations d'accessibilité**.
  Si $u\, R_i\, v$ alors le monde v est accessible à partir de u pour i[1].

Les propriétés (transitivité, réflexivité, symétrie ou antisymétrie) des relations R_i jouent un rôle.

$I_{\mathcal{M}}$ doit satisfaire des propriétés de compatibilité avec les R_i.

[1] On verra plus tard ce que ça signifie.

Les modèles de Kripke (cas propositionnelle intuitionniste)

1. Il n'y a qu'une relation notée $\leqslant_{\mathcal{M}}$, qui est un ordre, c-à-d réflexive, antisymétrique et transitive.
2. $I_{\mathcal{M}}$ est **dirigé**, c'est-à-dire que pour toute variable propositionnelle p,
   si $u \in I_{\mathcal{M}}(p)$ et $u \leqslant_{\mathcal{M}} v$ alors $v \in I_{\mathcal{M}}(p)$.

Forçage 1 / 2

On définit sur $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ une relation dite de **forçage** ou de *réalisabilité* qui s'écrit[2] :

- $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$
- ou $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$
- ou $u \Vdash \varphi$ s'il n'y a pas d'ambiguïtés sur $\mathcal{M}$.

[2] parfois aussi notée $\mathcal{M}, u \models \varphi$

Forçage 2 / 2

1. Si φ est une **variable** p :
   $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ si et seulement si $u \in I_{\mathcal{M}}(p)$
2. Si φ est une **conjonction** $\psi \wedge \theta$:
   $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ si et seulement si $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$ et $\mathcal{M}, u \Vdash \theta$
3. Si φ est une **disjonction** $\psi \vee \theta$:
   $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ si et seulement si $\mathcal{M}, u \Vdash \psi$ ou $\mathcal{M}, u \Vdash \theta$
4. Si φ est une **implication** $\psi \Rightarrow \theta$:
   $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ si et seulement si
   pour tout $v \geqslant_M u$ si $\mathcal{M}, v \Vdash \psi$ alors $\mathcal{M}, v \Vdash \theta$
5. Si $\bot$ est l'**absurde**, alors $\mathcal{M}, u \nVdash \bot$.

Monotonie du forçage

Proposition

$\Vdash_{\mathcal{M}}$ *est monotone.*

Si $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ *et* $u \leqslant_{\mathcal{M}} v$ *alors* $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$

Monotonie du forçage

Proposition

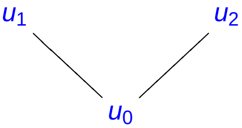
$\Vdash_{\mathcal{M}}$ est monotone.
Si $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$ et $u \leqslant_{\mathcal{M}} v$ alors $\mathcal{M}, v \Vdash \varphi$

En exercice !

Donc pour tout φ, l'ensemble $\{u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}} \mid u \Vdash \varphi\}$ est dirigé.

Exercice

Soit le modèle de Kripke $\mathcal{A}$:



où $u_0 \Vdash p$ et $u_1 \Vdash q$.

1. Donnez les valeurs de $I_{\mathcal{A}}$ pour p et q.
2. Annotez les mondes qui forcent $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$

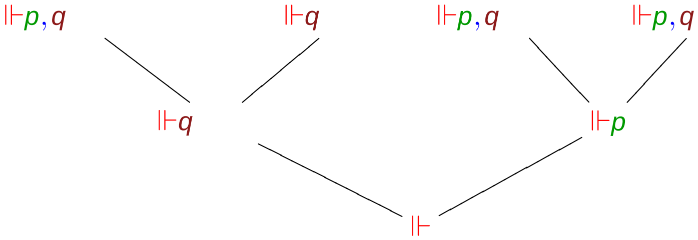
Solution de l'exercice 1 / 2

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
u_1 \Vdash p, q, p \vee q, p \wedge q \arrow[dr, dash] & & u_2 \Vdash p, p \vee q \arrow[dl, dash] \\
& u_0 \Vdash p, p \vee q &
\end{tikzcd}
$$

Solution de l'exercice 2 / 2

$$\begin{tikzcd}
u_1 \Vdash p, q, p \Rightarrow q & & u_2 \Vdash p \\
& u_0 \Vdash p \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Un autre exemple



Un autre exemple

$$\Vdash p, q, p \Rightarrow q \qquad \Vdash q, p \Rightarrow q \qquad \Vdash p, q, p \Rightarrow q \qquad \Vdash p, q, p \Rightarrow q$$

$$\Vdash q, p \Rightarrow q \qquad\qquad \Vdash p$$

$$\Vdash$$

Encore un autre exemple

$$\Vdash p, q, p \Rightarrow q \qquad \Vdash q, p \Rightarrow q \qquad \Vdash p, q, p \Rightarrow q \qquad \Vdash p, q, p \Rightarrow q$$

$$\Vdash q, p \Rightarrow q \qquad\qquad\qquad \Vdash p \Rightarrow q$$

$$\Vdash p \Rightarrow q$$

Quelques définitions

1. $\mathcal{M} \models \varphi$
   se lit $\mathcal{M}$ **modélise** φ, φ **est valide dans** $\mathcal{M}$
   et signifie : pour tout $u \in \mathcal{M}$, on a $\mathcal{M}, u \Vdash \varphi$.
2. $\models \varphi$
   se lit φ **est valide**
   et signifie pour tout modèle de Kripke $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \models \varphi$.

Plan

Théorème de correction

Théorème de complétude

- Réduction des modèles finis aux modèles infinis
- Ensembles premiers
- La complétude

Théorème (de correction)

Si $\vdash \varphi$ *alors* $\models \varphi$.

On a besoin d'une définition.

Définition

$\Gamma \models \varphi$ où $\Gamma \equiv \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$
signifie que pour tout modèle $\mathcal{M}$ et tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$,

$$u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1, \ldots, u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_n \text{ implique } u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi.$$

Théorème (de correction)

Si $\vdash \varphi$ *alors* $\models \varphi$.

Démonstration.

La démonstration se fait par induction sur la structure de l'arbre de preuve de $\Gamma \vdash \varphi$.

On fixe le modèle $\mathcal{M}$ dans la preuve.

On suppose que pour tout u, on a $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1, \ldots, u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_n$.

On cherche à montrer que $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$.

Théorème (de correction)

Si $\vdash \varphi$ *alors* $\models \varphi$.

Démonstration.

- L'arbre est réduit à une feuille. Alors $\varphi \in \Gamma$ et comme $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_1, \ldots, u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi_n$, on a $u \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi$

Théorème (de correction)

Si $\vdash \varphi$ *alors* $\models \varphi$.

Démonstration.

- Le nœud de la racine est la règle $\Rightarrow I$ et donc le jugement est $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \theta$.
  Par induction il existe un arbre de preuve pour $\Gamma, \psi \vdash \theta$.
  L'hypothèse d'induction nous dit que pour n'importe quel monde w, si $w \Vdash \varphi_1, \ldots, w \Vdash \varphi_n, w \Vdash \psi$ alors $w \Vdash \theta$.
  Considérons maintenant un monde u tel que $u \Vdash \varphi_1, \ldots, u \Vdash \varphi_n$.
  Si v est monde tel que $u \leqslant_{\mathcal{M}} v$ et $v \Vdash \psi$.
  Par monotonie, $v \Vdash \varphi_1, \ldots, v \Vdash \varphi_n$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à v et l'on a $v \Vdash \theta$.
  Par la définition de $\Vdash$ sur $\varphi \equiv \psi \Rightarrow \theta$ cela donne $u \Vdash \varphi$.

Théorème (de correction)

Si $\vdash \varphi$ *alors* $\models \varphi$.

Démonstration.

- Le nœud de la racine est la règle $\Rightarrow E$

  On a donc deux arbres de preuve pour $\Gamma \vdash \psi$ et $\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \varphi$.

  Soit u tel que

  $$u \Vdash \varphi_1, \ldots, u \Vdash \varphi_n.$$

  alors par hypothèse d'induction d'une part $u \Vdash \psi$ d'autre part $u \Vdash \psi \Rightarrow \varphi$.

  Par définition de $u \Vdash \psi \Rightarrow \varphi$, on a $u \Vdash \varphi$.

Théorème (de correction)

Si $\vdash \varphi$ *alors* $\vDash \varphi$.

Démonstration.

- Le nœud de la racine est la règle $\perp$.

  Si $u \Vdash \psi$ (pour tout $\psi \in \Gamma$) alors $u \Vdash \perp$, mais on sait que ça n'est pas possible, donc chaque fois qu'on a $u \Vdash \psi$ (pour tout $\psi \in \Gamma$), on aussi $u \Vdash \varphi$, donc $\Gamma \vDash \varphi$.

Théorème (de correction)

Si $\vdash \varphi$ *alors* $\models \varphi$.

Démonstration.

- Le nœud de la racine est la règle $\vee I_g$ avec $\Gamma \vdash \theta \vee \chi$.
  L'hypothèse d'induction dit que pour tout $u \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$
  - si pour tout $\psi \in \Gamma$ on a $u \Vdash \psi$ alors $u \Vdash \theta$,

  donc aussi $u \Vdash \theta \vee \chi$.

Théorème (de correction)

Si $\vdash \varphi$ *alors* $\models \varphi$.

Démonstration.

- Le nœud de la racine est la règle $\vee E$ avec comme prémisses $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, $\Gamma, \varphi \vdash \theta$ et $\Gamma, \psi \vdash \theta$;
  et comme conclusion $\Gamma \vdash \theta$.
  Considérons les u qui satisfont $u \Vdash \chi$ pour $\chi \in \Gamma$.
  L'hypothèse d'induction nous dit que pour ces u, on doit avoir $u \Vdash \varphi \vee \psi$.
  Si de plus $u \Vdash \varphi$ alors $u \Vdash \theta$.
  Et si de plus $u \Vdash \psi$ alors $u \Vdash \theta$ aussi.
  Mais comme on sait que $u \Vdash \varphi$ ou $u \Vdash \psi$ alors dans tous les cas $u \Vdash \theta$. $\square$

Exercice

$I_{\mathcal{M}}\, p = \{u_1\}$. Donc $u_1 \Vdash p$ et $u_0 \nVdash p$.

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[d, dash] \\ u_0 \end{tikzcd}$$

Exercice

$I_{\mathcal{M}}\, p = \{u_1\}$. Donc $u_1 \Vdash p$ et $u_0 \nVdash p$.

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[d, dash] \\ u_0 \end{tikzcd}$$

On sait que $u \Vdash \varphi \Rightarrow \bot$ ssi $(\forall v :)\ v \geqslant_{\mathcal{M}} u \Rightarrow v \nVdash \varphi$.
Donc $u \nVdash \varphi \Rightarrow \bot$ ssi $(\exists v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}})\ v \geqslant_{\mathcal{M}} u \quad \& \quad v \Vdash \varphi$.
Par conséquent, $u_0 \nVdash p \Rightarrow \bot$.

Exercice

$I_{\mathcal{M}}\, p = \{u_1\}$. Donc $u_1 \Vdash p$ et $u_0 \nVdash p$.

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[d, dash] \\ u_0 \end{tikzcd}$$

On sait que $u \Vdash \varphi \Rightarrow \bot$ ssi $(\forall v :)\ v \geqslant_{\mathcal{M}} u \Rightarrow v \nVdash \varphi$.
Donc $u \nVdash \varphi \Rightarrow \bot$ ssi $(\exists v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}})\ v \geqslant_{\mathcal{M}} u \quad \& \quad v \Vdash \varphi$.
Par conséquent, $u_0 \nVdash p \Rightarrow \bot$.

D'où il vient que $u_0 \nVdash p \vee p \Rightarrow \bot$.

Exercice

$I_{\mathcal{M}}\, p = \{u_1\}$. Donc $u_1 \Vdash p$ et $u_0 \nVdash p$.

$$\begin{array}{c} u_1 \\ | \\ u_0 \end{array}$$

On sait que $u \Vdash \varphi \Rightarrow \bot$ ssi $(\forall v :)\ v \geqslant_{\mathcal{M}} u \Rightarrow v \nVdash \varphi$.
Donc $u \nVdash \varphi \Rightarrow \bot$ ssi $(\exists v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}})\ v \geqslant_{\mathcal{M}} u \quad \& \quad v \Vdash \varphi$.
Par conséquent, $u_0 \nVdash p \Rightarrow \bot$.

D'où il vient que $u_0 \nVdash p \vee p \Rightarrow \bot$.

Donc $\mathcal{M} \nVdash p \vee \neg p$

Exercice

$I_{\mathcal{M}}\, p = \{u_1\}$. Donc $u_1 \Vdash p$ et $u_0 \nVdash p$.

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[d, dash] \\ u_0 \end{tikzcd}$$

On sait que $u \Vdash \varphi \Rightarrow \bot$ ssi $(\forall v :)\ v \geqslant_{\mathcal{M}} u \Rightarrow v \nVdash \varphi$.
Donc $u \nVdash \varphi \Rightarrow \bot$ ssi $(\exists v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}})\ v \geqslant_{\mathcal{M}} u \quad \& \quad v \Vdash \varphi$.
Par conséquent, $u_0 \nVdash p \Rightarrow \bot$.

D'où il vient que $u_0 \nVdash p \vee p \Rightarrow \bot$.

Donc $\mathcal{M} \nVdash p \vee \neg p$ Donc $\nVdash p \vee \neg p$.

Exercice

$I_{\mathcal{M}}\, p = \{u_1\}$. Donc $u_1 \Vdash p$ et $u_0 \nVdash p$.

$$\begin{tikzcd} u_1 \arrow[d, dash] \\ u_0 \end{tikzcd}$$

On sait que $u \Vdash \varphi \Rightarrow \bot$ ssi $(\forall v :)\ v \geqslant_{\mathcal{M}} u \Rightarrow v \nVdash \varphi$.
Donc $u \nVdash \varphi \Rightarrow \bot$ ssi $(\exists v \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}})\ v \geqslant_{\mathcal{M}} u \quad \& \quad v \Vdash \varphi$.
Par conséquent, $u_0 \nVdash p \Rightarrow \bot$.

D'où il vient que $u_0 \nVdash p \vee p \Rightarrow \bot$.

Donc $\mathcal{M} \nVdash p \vee \neg p$ Donc $\nVdash p \vee \neg p$.

Donc par le **théorème de correction** $\nvdash p \vee \neg p$.

Le **tiers exclus** n'est pas prouvable dans le logique intuitionniste.

Plan

Théorème de correction

Théorème de complétude

- Réduction des modèles finis aux modèles infinis
- Ensembles premiers
- La complétude

On se restreint aux connecteurs $\vee$ et $\Rightarrow$.

Un ensemble Γ de propositions est **stable par sous terme** (ou sous-formule) si quand Γ contient φ il contient toutes les propositions qui sont des sous-termes de φ.

Plan

Théorème de correction

Théorème de complétude

- Réduction des modèles finis aux modèles infinis
- Ensembles premiers
- La complétude

Soient $\mathbf{K}$ un modèle de Kripke et Γ un ensemble fini de propositions stable par sous-terme.
Nous associons à $\mathbf{K}$ un modèle de Kripke fini $\mathbf{K}_\Gamma = (U_\Gamma, \leqslant_\Gamma, I_\Gamma)$ comme suit.
Pour chaque $u \in U$,

- $[u] = \{\varphi \in \Gamma \mid u \Vdash \varphi\}$
- et $U_\Gamma = \{[u] \mid u \in U\}$.

L'ordre $\leqslant_\Gamma$ est l'ordre d'inclusion des sous-ensembles de propositions.
Par définition $I_\Gamma(p) = \{[u] \mid p \in [u]\}$.
On dit que $\mathbf{K}_\Gamma$ est obtenu par **filtration** à partir de $\mathbf{K}$.

Modèles finis ou infinis 3 / 4

U_Γ est fini.
I_Γ est dirigé pour $\leqslant_\Gamma$ qui est aussi $\subseteq$.

Proposition

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. $[u] \Vdash_{K_\Gamma} \varphi$,
2. $u \Vdash_K \varphi$ *(autrement dit dans ce cas* $\varphi \in [u]$*).*

Modèles finis ou infinis 4 / 4

$\models \varphi$ si et seulement si $\mathbf{K} \models \varphi$ pour tous les modèles $\mathbf{K}$ finis.

Plan

Définition d'un ensemble premier

Un ensemble de propositions Δ est **premier** s'il satisfait les deux conditions :

- Δ est clos par $\vdash$,
- si $\psi \vee \chi \in \Delta$ alors ou bien $\psi \in \Delta$, ou bien $\chi \in \Delta$.

Construction d'un premier tel que $\Gamma' \nvdash \varphi$ 1 / 4

Soient Γ un ensemble de propositions et φ une proposition telle $\Gamma \nvdash \varphi$, on veut construire un ensemble Γ' premier tel que

- $\Gamma' \supseteq \Gamma$
- et tel que $\Gamma' \nvdash \varphi$.

Construction d'un premier tel que $\Gamma' \nvdash \varphi$ 2 / 4

On ordonne les propositions disjonctives en une suite
$(\psi_1 \vee \chi_1, \ldots, \psi_n \vee \chi_n, \ldots)$.
On construit la suite Γ_k.
$\Gamma_0 \triangleq \Gamma$.
Supposons construit Γ_k avec $\Gamma_k \nvdash \varphi$.
Considérons la première proposition de la suite ci-dessus telle que
$\Gamma_k \vdash \psi_{n_k} \vee \chi_{n_k}$ et $\Gamma_k \nvdash \psi_{n_k}$ et $\Gamma_k \nvdash \chi_{n_k}$.

Construction d'un premier tel que $\Gamma' \nvdash \varphi$ *3 / 4*

On n'a pas à la fois $\Gamma_k, \psi_{n_k} \vdash \varphi$ et $\Gamma_k, \chi_{n_k} \vdash \varphi$.
On peut donc définir

$$\Gamma_{k+1} := \begin{cases} \Gamma_k \cup \{\psi_{n_k}\} \text{ si } \Gamma_k, \psi_{n_k} \nvdash \varphi \\ \Gamma_k \cup \{\chi_{n_k}\} \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

et

$$\Gamma' = \bigcup_{k \geqslant 0} \Gamma_k$$

- $\Gamma' \nvdash \varphi$,
- Γ' est premier.

Construction d'un premier tel que $\Gamma' \nvdash \varphi$ 4 / 4

Proposition

Γ' *est premier.*

Démonstration.

Soit $\varphi \vee \chi \in \Gamma'$.

Soit k le plus petit entier tel que $\Gamma_k \vdash \varphi \vee \chi$.

Clairement,

- $\varphi \vee \chi$ n'a pas été examiné avant l'étape k,
- et $\Gamma_h \vdash \varphi \vee \chi$, pour $h \geqslant k$.

Donc $\varphi \vee \chi$ a été examiné à une étape $h \geqslant k$ et ainsi

- $\varphi \in \Gamma_h$ ou $\chi \in \Gamma_h$,
- donc $\varphi \in \Gamma'$ ou $\chi \in \Gamma'$.

$\square$

Proposition

Soient Γ un ensemble de propositions et φ une proposition telle $\Gamma \nvdash \varphi$, il existe un ensemble Γ' premier tel que

- $\Gamma' \supseteq \Gamma$
- *et tel que $\Gamma' \nvdash \varphi$.*

Plan

Théorème de correction

Théorème de complétude

Réduction des modèles finis aux modèles infinis

Ensembles premiers

La complétude

L'objectif

Supposons $\Gamma \not\models \varphi$.
On va construire

- un modèle de Kripke $\mathbf{K} = (U, \leqslant, I)$
- et un monde u *minimum* dans U tels que $u \Vdash \Gamma$ et $u \nVdash \varphi$.

Soit Γ' un ensemble premier de propositions tel que

- $\Gamma' \supseteq \Gamma$
- et $\Gamma' \not\models \varphi$.

La construction 1 / 1

U est l'ensemble des suites finies d'entiers ordonnées par l'ordre préfixe
ε est la suite vide.
Un monde $\alpha \in U$ est une suite finie d'entiers $\alpha \equiv a_1 \ldots a_p$.

La construction 2 / 1

On construit le modèle **K** et des ensembles $\Gamma(\alpha)$ associés à chaque suite d'entiers α.

- cas ε. $\Gamma(\varepsilon) = \Gamma'$.
- cas αi. Soit une suite $((\sigma_0, \tau_0), (\sigma_1, \tau_1), \ldots, (\sigma_n, \tau_n), \ldots,)$ énumérant tous les (σ_i, τ_i) tels que $\Gamma(\alpha), \sigma_i \not\vdash \tau_i$. On peut construire un ensemble premier $\Gamma(\alpha i)$ tel que $\sigma_i \in \Gamma(\alpha i)$ et $\Gamma(\alpha i) \not\vdash \tau_i$. Pourquoi ?

Par définition, $\alpha \in \mathcal{I}(p)$ si et seulement si $p \in \Gamma(\alpha)$.

On a besoin d'un lemme qui s'énonce :

Lemme

Supposons que

$$(\forall \beta \in \mathbb{N}^*)\ \beta \Vdash \psi_1 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma(\beta) \vdash \psi_1 \qquad (H_1)$$

et

$$(\forall \beta \in \mathbb{N}^*)\ \beta \Vdash \psi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma(\beta) \vdash \psi_2 \qquad (H_2)$$

Alors $\alpha \Vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2$ *implique* $\Gamma(\alpha) \vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2$

Preuve du lemme

Démonstration.

Supposons $\Gamma(\alpha) \not\vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2$

Soit k l'entier correspondant au couple $(\psi_i, \psi_1 \Rightarrow \psi_2)$ dans la construction des $\Gamma(\alpha\, i)$.

1. $\Gamma(\alpha\, k) \ni \psi_1$
2. $\Gamma(\alpha\, k) \not\vdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2$
3. donc de 1. et 2. on déduit $\Gamma(\alpha\, k) \not\vdash \psi_2$.

De (H_1) et 1. on déduit $\alpha\, k \Vdash \psi_1$. De (H_2) et 3. on déduit $\alpha\, k \nVdash \psi_2$.
Donc $\alpha \nVdash \psi_1 \Rightarrow \psi_2$. $\square$

Proposition

$\alpha \Vdash \psi$ *si et seulement si* $\Gamma(\alpha) \vdash \psi$.

La démonstration se fait par induction sur la structure de ψ en utilisant le lemme.

La construction 5 / 1

On peut prouver que

- $\alpha \Vdash \psi$ si et seulement si $\Gamma(\alpha) \vdash \psi$.

On en déduit

- que $\varepsilon \Vdash \psi$ (pour chaque $\psi \in \Gamma$)
- et que $\varepsilon \nVdash \varphi$.

Le résultat

On a montré que si $\Gamma \nvdash \varphi$ alors $\Gamma \nvDash \varphi$
On conclut :

Théorème
Si $\vDash \varphi$ *alors* $\vdash \varphi$.