Confluence du lambda calcul

Pierre Lescanne

29 novembre 2004 – 15 h 59

Propriété du losange

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, "R"] & & N_2 \arrow[dl, "R"'] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Confluence

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, two heads, "R"'] \arrow[dr, two heads, "R"] & \\ N_1 & & N_2 \end{tikzcd} \Longrightarrow \exists P \quad \begin{tikzcd} N_1 \arrow[dr, two heads, "R"] & & N_2 \arrow[dl, two heads, "R"'] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Remarques

1. $\xrightarrow[R]{}$ est confluente si $\underset{R}{\twoheadrightarrow}$ a la propriété du losange.
2. Parfois on note la confluence :

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
{} \arrow[dr, dotted, two heads] & & {} \arrow[dl, dotted, two heads] \\
 & {} &
\end{tikzcd}
$$

   où $\overset{\cdots\cdots}{\twoheadrightarrow}$ est un flèche existentielle.

Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser)

Si R est confluente alors

$M \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} N \iff \exists P (M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).$

Démonstration.

$\Leftarrow$ est évident car $\underset{R}{\twoheadrightarrow} \subseteq \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ et $\overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}}$ est symétrique et transitive.

Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser)

Si R est confluente alors

$M \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} N \iff \exists P(M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P)$.

Démonstration.

⇒ Par induction sur le nombre de «pics» dans $M \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} N$. Soit

$$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots$$

$$\ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

- si $n = 0$ alors $M \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$ ou $M \underset{R}{\twoheadrightarrow} N$.

Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser)

Si R est confluente alors

$$M \overset{*}{\underset{R}{\longleftrightarrow}} N \iff \exists P (M \underset{R}{\twoheadrightarrow} P \wedge N \underset{R}{\twoheadrightarrow} P).$$

Démonstration.

$\Rightarrow$

- si $n \neq 0$, par confluence, dans

  $$M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$$

  il existe M'_n tel que $N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} M'_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$

  et $M \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_1 \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} M_i \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} N_1 \ldots$

  $\ldots N_{n-1} \overset{+}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}} M'_n \overset{+}{\underset{R}{\twoheadleftarrow}} N_n \underset{R}{\twoheadleftarrow} N$

  a un pic de moins, donc on a le résultat par induction. $\square$

Confluence et convertibilité

Corollaire

Si R est confluente

1. *Si N est une forme normale de M alors $M \xrightarrow[R]{} \!\!\!\!\!\!\rightarrow N$.*
2. *Un terme a au plus une forme normale.*

Confluence de $\rightarrow_\beta$

Théorème

$\xrightarrow[\beta]{}$ *est confluent*

Remarques préliminaires

- Si $\xrightarrow[R]{}$ a la propriété du losange, alors $\overset{}{\underset{R}{\twoheadrightarrow}}$ a la propriété du losange.
- $\xrightarrow[\beta]{}$ n'a pas la propriété du losange. Pourquoi ?
- Il faut donc trouver une relation $\mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow}$ telle que
  - $\mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow}$ a la propriété du losange,
  - $\mathrel{-\!\!\|\!\!\twoheadrightarrow} \; = \; \underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$,
    - donc $\underset{\beta}{\twoheadrightarrow}$ a la propriété du losange,
    - ce qui signifie que $\xrightarrow[\beta]{}$ est confluente.

Lemme de substitution

Lemme

Si $x \notin FV(L)$ *alors*
$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

Démonstration.

Par induction sur la structure de M.

- M est la variable x : Alors $M[x := N][y := L] \equiv$

$$\begin{aligned} &\equiv \quad x[x := N][y := L] \\ &\equiv \quad N[y := L] \\ &\equiv \quad x[x := N[y := L]] \\ &\equiv \quad x[y := L][x := N[y := L]] \end{aligned}$$

□

Lemme de substitution

Lemme

Si $x \notin FV(L)$ *alors*

$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

Démonstration.

Par induction sur la structure de M.

- M est la variable y : Alors $M[x := N][y := L] \equiv$

$$
\begin{aligned}
&\equiv && y[x := N][y := L] \\
&\equiv && y[y := L] \\
&\equiv && L \\
&\equiv && L[x := N[y := L]] \quad (\text{par } x \notin FV(L)) \\
&\equiv && (y[y := L])[x := N[y := L]]
\end{aligned}
$$

□

Lemme de substitution

Lemme

Si $x \notin FV(L)$ *alors*

$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

Démonstration.

Par induction sur la structure de M.

- M est la variable z : Alors $M[x := N][y := L] \equiv$

$$
\begin{aligned}
&\equiv && z[x := N][y := L] \\
&\equiv && z[y := L] \\
&\equiv && z \\
&\equiv && z[x := N[y := L]] \\
&\equiv && z[y := L][x := N[y := L]]
\end{aligned}
$$

□

Lemme de substitution

Lemme

Si $x \notin FV(L)$ *alors*
$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$

Démonstration.

Par induction sur la structure de M.

- M est une abstraction : $M \equiv \lambda z.M_1$. Alors $M[x := N][y := L] \equiv$

$$
\begin{aligned}
&\equiv (\lambda z.M_1)[x := N][y := L] \\
&\equiv \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) && \text{(par définition)} \\
&\equiv \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) && \text{(par induction)} \\
&\equiv (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] && \text{(par définition)}
\end{aligned}
$$

- M est une application : facile. □

Définition de la réduction parallèle

$$\frac{}{M \mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow} M}\ \text{(réflexivité)}$$

$$\frac{M \mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow} M' \qquad N \mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow} N'}{MN \mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow} M'N'}\ \text{(APP-congruence)}$$

$$\frac{M \mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow} M'}{\lambda x.M \mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow} \lambda x.M'}\ \text{(ABS-congruence)}$$

$$\frac{M \mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow} M' \qquad N \mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow} N'}{(\lambda x.M)N \mathrel{-\!\!\|\!\!\rightarrow} M'[x := N']}\ (\beta\text{-parallèle})$$

Trois résultats

1. Si $M \xrightarrow[\beta]{} M'$ alors $M \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} M'$

   c'est-à-dire $\xrightarrow[\beta]{} \ \subseteq\ \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;}$

2. Si $M \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} M'$ alors $M \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow M'$

   c'est-à-dire $\mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} \ \subseteq\ \xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow$

3. Si $M \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} M'$ et $N \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} N'$ alors

   $$M[x := N] \mathrel{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\parallel\;\;\;} M'[x := N']$$

En exercice.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte
que la propriété du losange pour $\mathrel{-\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow}$:

$$M \mathrel{-\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow} N \Longrightarrow N \mathrel{-\!\!\!\|\!\!\!\rightarrow} M^* \tag{1}$$

où M^* est un terme déterminé par M mais *indépendant* de N.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte
que la propriété du losange pour $\mathrel{\longrightarrow\mkern-22mu\Vert\mkern12mu}$:

$$M \mathrel{\longrightarrow\mkern-22mu\Vert\mkern12mu} N \Longrightarrow N \mathrel{\longrightarrow\mkern-22mu\Vert\mkern12mu} M^* \tag{1}$$

où M^* est un terme déterminé par M mais *indépendant* de N.
Intuitivement, M^* est le terme obtenu à partir de M en contractant tous ses redex simultanément.

Le définition de M^*

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1 M_2)^* \equiv M_1^* M_2^*$ si $M_1 M_2$ n'est pas un redex.
4. $((\lambda x.M_1)M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

Exercices

Calculer

1. $((\lambda x.x)\ ((\lambda yzu.y\ (z\ u))\ abc))^*$
2. $((\lambda x.x\ x)\ (\lambda y.y\ y))^*$

Proposition

$M \mathrel{-\!\!\!\parallel\!\!\!\rightarrow} N \Longrightarrow N \mathrel{-\!\!\!\parallel\!\!\!\rightarrow} M^*$

Démonstration.

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition M^* sont laissés en exercice.

Si $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \mathrel{-\!\!\!\parallel\!\!\!\rightarrow} N$, alors deux cas pour N,

- $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$
- $N \equiv N_1[x := N_2]$

dans les deux cas, il y a des N_i (i=1 ou i=2) tels que $M_i \mathrel{-\!\!\!\parallel\!\!\!\rightarrow} N_i$.

Par induction, $N_i \mathrel{-\!\!\!\parallel\!\!\!\rightarrow} M_i^*$.

Pour chaque cas :

- Si $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$ alors $N \mathrel{-\!\!\!\parallel\!\!\!\rightarrow} M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$.
- Si $N \equiv N_1[x := N_2]$, alors nous avons

  $N \mathrel{-\!\!\!\parallel\!\!\!\rightarrow} M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$,

  préservation de $\mathrel{-\!\!\!\parallel\!\!\!\rightarrow}$ par substitution. □

Résumons

De la propriété 1 pour $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;$

on déduit la propriété du losange pour $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour $\twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;$
de laquelle on déduit la propriété du losange pour $\xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow$

parce que $\xrightarrow[\beta]{}\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \;=\; \twoheadrightarrow\!\!\!\!\!\!\shortmid\!\shortmid\;$,

qui est la confluence de $\xrightarrow[\beta]{}$.

Donc $\xrightarrow[\beta]{}$ est confluent. $\square$