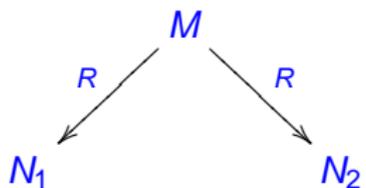


Confluence du lambda calcul

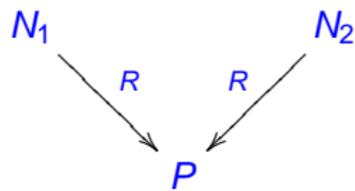
Pierre Lescanne

29 novembre 2004 – 15 h 59

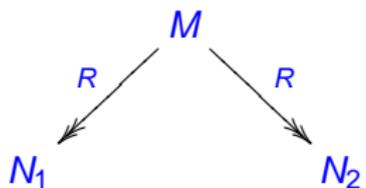
Propriété du losange



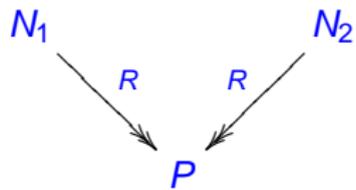
$\implies \exists P$



Confluence

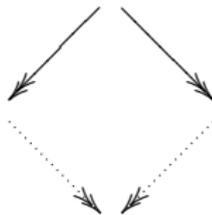


$\implies \exists P$



Remarques

1. \xrightarrow{R} est confluente si \xrightarrow{R} a la propriété du losange.
2. Parfois on note la confluence :



où $\cdots \rightarrow$ est un flèche existentielle.

Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser)

Si R est confluente alors

$$M \xrightarrow[R]{*} N \iff \exists P (M \xrightarrow[R]{\twoheadrightarrow} P \wedge N \xrightarrow[R]{\twoheadrightarrow} P).$$

Démonstration.

\Leftarrow est évident car $\xrightarrow[R]{\twoheadrightarrow} \subseteq \xrightarrow[R]{*}$ et $\xrightarrow[R]{*}$ est symétrique et transitive.

Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser)

Si R est confluente alors

$$M \xleftrightarrow[R]{*} N \iff \exists P (M \xrightarrow[R]{\twoheadrightarrow} P \wedge N \xrightarrow[R]{\twoheadrightarrow} P).$$

Démonstration.

\Rightarrow Par induction sur le nombre de «pics» dans $M \xleftrightarrow[R]{*} N$. Soit

$$M \xleftarrow[R]{+} M_1 \xrightarrow[R]{+} N_1 \dots \xleftarrow[R]{+} M_i \xrightarrow[R]{+} N_1 \dots$$

$$\dots N_{n-1} \xleftarrow[R]{+} M_n \xrightarrow[R]{+} N_n \xleftarrow[R]{+} N$$

► si $n = 0$ alors $M \xleftarrow[R]{+} N$ ou $M \xrightarrow[R]{+} N$.

Confluence et convertibilité

Théorème (Church-Rosser)

Si R est confluente alors

$$M \xrightarrow[R]{*} N \iff \exists P (M \xrightarrow[R]{} P \wedge N \xrightarrow[R]{} P).$$

Démonstration.

⇒ si $n \neq 0$, par confluence, dans

$$M \xleftarrow[R]{+} M_1 \xrightarrow[R]{} N_1 \dots N_{n-1} \xleftarrow[R]{+} M_n \xrightarrow[R]{} N_n \xleftarrow[R]{} N$$

il existe M'_n tel que $N_{n-1} \xrightarrow[R]{} M'_n \xleftarrow[R]{+} N_n \xleftarrow[R]{} N$

et $M \xleftarrow[R]{+} M_1 \xrightarrow[R]{} N_1 \dots \xleftarrow[R]{+} M_i \xrightarrow[R]{} N_1 \dots$

$$\dots N_{n-1} \xrightarrow[R]{} M'_n \xleftarrow[R]{+} N_n \xleftarrow[R]{} N$$

a un pic de moins, donc on a le résultat par induction. □

Confluence et convertibilité

Corollaire

Si R est confluente

1. Si N est une forme normale de M alors $M \xrightarrow{R} N$.
2. Un terme a a au plus une forme normale.

Confluence de \rightarrow_{β}

Théorème

\rightarrow_{β} est confluente

Remarques préliminaires

- ▶ Si \xrightarrow{R} a la propriété du losange, alors $\xrightarrow{R}\Rightarrow$ a la propriété du losange.
- ▶ $\xrightarrow{\beta}$ n'a pas la propriété du losange. Pourquoi ?
- ▶ Il faut donc trouver une relation $\dashv\vdash\Rightarrow$ telle que
 - ▶ $\dashv\vdash\Rightarrow$ a la propriété du losange,
 - ▶ $\dashv\vdash\Rightarrow = \xrightarrow{\beta}\Rightarrow$,
 - donc $\xrightarrow{\beta}\Rightarrow$ a la propriété du losange,
 - ce qui signifie que $\xrightarrow{\beta}$ est confluent.

Lemme de substitution

Lemme

Si $x \notin FV(L)$ alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Démonstration.

Par induction sur la structure de M .

► **M est la variable x** : Alors $M[x := N][y := L] \equiv$

$$\equiv x[x := N][y := L]$$

$$\equiv N[y := L]$$

$$\equiv x[x := N[y := L]]$$

$$\equiv x[y := L][x := N[y := L]]$$



Lemme de substitution

Lemme

Si $x \notin FV(L)$ alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Démonstration.

Par induction sur la structure de M .

► **M est la variable y** : Alors $M[x := N][y := L] \equiv$

$$\equiv y[x := N][y := L]$$

$$\equiv y[y := L]$$

$$\equiv L$$

$$\equiv L[x := N[y := L]] \quad (\text{par } x \notin FV(L))$$

$$\equiv (y[y := L])[x := N[y := L]]$$



Lemme de substitution

Lemme

Si $x \notin FV(L)$ alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Démonstration.

Par induction sur la structure de M .

► **M est la variable z** : Alors $M[x := N][y := L] \equiv$

$$\equiv z[x := N][y := L]$$

$$\equiv z[y := L]$$

$$\equiv z$$

$$\equiv z[x := N[y := L]]$$

$$\equiv z[y := L][x := N[y := L]]$$



Lemme de substitution

Lemme

Si $x \notin FV(L)$ alors

$$M[x := N][y := L] \equiv M[y := L][x := N[y := L]]$$

Démonstration.

Par induction sur la structure de M .

► **M est une abstraction** : $M \equiv \lambda z.M_1$. Alors $M[x := N][y := L] \equiv$

$$\equiv (\lambda z.M_1)[x := N][y := L]$$

$$\equiv \lambda z.(M_1[x := N][y := L]) \quad (\text{par définition})$$

$$\equiv \lambda z.(M_1[y := L][x := N[y := L]]) \quad (\text{par induction})$$

$$\equiv (\lambda z.M_1)[y := L][x := N[y := L]] \quad (\text{par définition})$$

► **M est une application** : facile. □

Définition de la réduction parallèle

$$\frac{}{M \dashv\vdash M} \text{ (réflexivité)}$$

$$\frac{M \dashv\vdash M' \quad N \dashv\vdash N'}{MN \dashv\vdash M'N'} \text{ (APP-congruence)}$$

$$\frac{M \dashv\vdash M'}{\lambda x.M \dashv\vdash \lambda x.M'} \text{ (ABS-congruence)}$$

$$\frac{M \dashv\vdash M' \quad N \dashv\vdash N'}{(\lambda x.M)N \dashv\vdash M'[x := N']} \text{ (\beta-parallèle)}$$

Trois résultats

1. Si $M \xrightarrow{\beta} M'$ alors $M \dashrightarrow M'$

c'est-à-dire $\xrightarrow{\beta} \subseteq \dashrightarrow$

2. Si $M \dashrightarrow M'$ alors $M \xrightarrow{\beta} M'$

c'est-à-dire $\dashrightarrow \subseteq \xrightarrow{\beta}$

3. Si $M \dashrightarrow M'$ et $N \dashrightarrow N'$ alors

$$M[x := N] \dashrightarrow M'[x := N']$$

En exercice.

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte
que la propriété du losange pour $\dashv\vdash$:

$$M \dashv\vdash N \implies N \dashv\vdash M^* \tag{1}$$

où M^* est un terme déterminé par M mais *indépendant* de N .

Une propriété plus forte

On prouve une propriété plus forte
que la propriété du losange pour $\dashv\dashv>$:

$$M \dashv\dashv> N \implies N \dashv\dashv> M^* \quad (1)$$

où M^* est un terme déterminé par M mais *indépendant* de N .
Intuitivement, M^* est le terme obtenu à partir de M en contractant tous ses redex simultanément.

*Le définition de M^**

1. $x^* \equiv x$
2. $(\lambda x.M)^* \equiv \lambda x.M^*$
3. $(M_1 M_2)^* \equiv M_1^* M_2^*$ si $M_1 M_2$ n'est pas un redex.
4. $((\lambda x.M_1)M_2)^* \equiv M_1^*[x := M_2^*]$

Exercices

Calculer

1. $((\lambda x.x) ((\lambda yzu.y (z u)) abc))^*$

2. $((\lambda x.x x) (\lambda y.y y))^*$

Proposition

$$M \dashv\vdash N \implies N \dashv\vdash M^*$$

Démonstration.

Les cas correspondant aux parties 1., 2. et 3. de la définition M^* sont laissés en exercice.

Si $M \equiv ((\lambda x.M_1)M_2) \dashv\vdash N$, alors deux cas pour N ,

- ▶ $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$
- ▶ $N \equiv N_1[x := N_2]$

dans les deux cas, il y a des N_i ($i=1$ ou $i=2$) tels que $M_i \dashv\vdash N_i$.

Par induction, $N_i \dashv\vdash M_i^*$.

Pour chaque cas :

- ▶ Si $N \equiv (\lambda x.N_1)N_2$ alors $N \dashv\vdash M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*$.
- ▶ Si $N \equiv N_1[x := N_2]$, alors nous avons

$$N \dashv\vdash M_1^*[x := M_2^*] \equiv M^*,$$

préservation de $\dashv\vdash$ par substitution. □

Résumons

De la propriété 1 pour $\dashv\vdash \Rightarrow$

on déduit la propriété du losange pour $\dashv\vdash \Rightarrow$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour $\dashv\vdash \Rightarrow$

de laquelle on déduit la propriété du losange pour $\xrightarrow{\beta}$

parce que $\xrightarrow{\beta} = \dashv\vdash \Rightarrow$,

qui est la confluence de $\xrightarrow{\beta}$.

Donc $\xrightarrow{\beta}$ est confluent. □