Logique combinatoire

Pierre Lescanne

29 novembre 2004 – 15 h 59

Plan

Syntaxe et réductions

Types

Correspondance avec le lambda-calcul

La syntaxe

Il s'agit d'une structure algébrique avec trois opérateurs.

- Un opérateur binaire l'**application**,
- Deux constantes S et K.

$$M, N \quad ::= \quad \mathsf{S} \mid \mathsf{K} \mid x \mid M\ N$$

Les termes ainsi formés sont les **CL-termes.**
Si M et P sont deux CL-termes, on note l'application de M à P par la concaténation soit $M\ P$.

La syntaxe

Il s'agit d'une structure algébrique avec trois opérateurs.

- Un opérateur binaire l'**application**,
- Deux constantes S et K.

$$M, N \quad ::= \quad \mathsf{S} \mid \mathsf{K} \mid x \mid M\ N$$

Les termes ainsi formés sont les **CL-termes.**
Si M et P sont deux CL-termes, on note l'application de M à P par la concaténation soit $M\ P$.

Les règles de paranthèsage sont les même que pour le λ-calcul.

On écrit $MN(PQ)$ pour $(MN)(PQ)$.

Les variables

Il n’y a **ni abstraction**, **ni variables liées**.

Les termes clos ne contiennent **aucune occurrence de variables**.

On peut donc parler de **programmation sans variables.**

Les variables

Il n'y a **ni abstraction**, **ni variables liées**.

Les termes clos ne contiennent **aucune occurrence de variables**.

On peut donc parler de **programmation sans variables.**

Les variables servent essentiellement comme marqueurs pour les substitutions.
Par exemple dans les règles de réduction.

Les règles

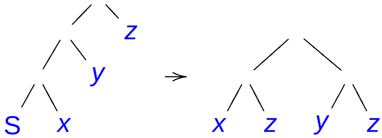
On définit deux règles de réduction

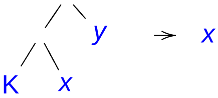
$$\begin{aligned} Sxyz &\xrightarrow[CL]{} xz(yz) \\ Kxy &\xrightarrow[CL]{} x \end{aligned}$$

Les règles

On définit deux règles de réduction

$$
\begin{array}{rcl}
\mathsf{S}xyz & \xrightarrow[CL]{} & xz(yz) \\
\mathsf{K}xy & \xrightarrow[CL]{} & x
\end{array}
$$





Quelques termes 1 / 3

$$\begin{aligned} \mathsf{SKK}x &\xrightarrow[CL]{} \mathsf{K}x(\mathsf{K}x) \\ &\xrightarrow[CL]{} x \end{aligned}$$

On appelle très naturellement ce terme I et on retient la règle

$$\mathsf{I}x \xrightarrow[CL]{} x$$

Quelques termes 2 / 3

On remarque que

$$\begin{aligned} \mathsf{SII}x &\xrightarrow[CL]{} \mathsf{I}x\,(\mathsf{I}x) \\ &\xrightarrow[CL]{} x\ x \end{aligned}$$

donc

$$\mathsf{SII}(\mathsf{SII}) \xrightarrow[CL]{} \!\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathsf{SII}(\mathsf{SII})$$

SII correspond à ω et $\mathsf{SII}(\mathsf{SII})$ correspond à Ω.

Quelques termes 3 / 3

$$
\begin{aligned}
\mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}\,xyz &\xrightarrow[CL]{} \mathsf{KS}x(\mathsf{K}x)yz \\
&\xrightarrow[CL]{} \mathsf{S}(\mathsf{K}x)yz \\
&\xrightarrow[CL]{} \mathsf{K}xz(yz) \\
&\xrightarrow[CL]{} x(yz).
\end{aligned}
$$

Donc $\mathsf{S}(\mathsf{KS})\mathsf{K}$ équivaut à $\mathsf{B} \equiv \lambda xyz.x(yz)$.

Questions

Question 1: Quel combinateur satisfait $\mathsf{F}xy \underset{CL}{\twoheadrightarrow} y$?

Questions

Question 1: Quel combinateur satisfait $\mathsf{F}xy \xrightarrow[CL]{} \!\!\!\rightarrow y$?

Question 2: Que vaut

$$\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})?$$

Questions

Question 1: Quel combinateur satisfait $\mathsf{F}xy \xrightarrow[CL]{} \!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\to y$?

Question 2: Que vaut

$$\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})?$$

$$\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})xyz \quad \xrightarrow[CL]{} \quad \mathsf{BBS}x(\mathsf{KK}x)yz$$

Questions

Question 1: Quel combinateur satisfait $\mathsf{F}xy \underset{CL}{\twoheadrightarrow} y$?

Question 2: Que vaut

$$\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})?$$

$$\begin{aligned} \mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})xyz \quad & \underset{CL}{\rightarrow} \quad \mathsf{BBS}x(\mathsf{KK}x)yz \\ & \underset{CL}{\rightarrow} \quad \mathsf{B}(\mathsf{S}x)(\mathsf{KK}x)yz \end{aligned}$$

Questions

Question 1: Quel combinateur satisfait $\mathsf{F}xy \underset{CL}{\twoheadrightarrow} y$?

Question 2: Que vaut

$$\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})?$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})xyz &\underset{CL}{\longrightarrow} \mathsf{BBS}x(\mathsf{KK}x)yz \\
&\underset{CL}{\longrightarrow} \mathsf{B}(\mathsf{S}x)(\mathsf{KK}x)yz \\
&\underset{CL}{\longrightarrow} \mathsf{S}x(\mathsf{KK}xy)z
\end{aligned}$$

Questions

Question 1: Quel combinateur satisfait $\mathsf{F}xy \underset{CL}{\twoheadrightarrow} y$?

Question 2: Que vaut

$$\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})?$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})xyz &\xrightarrow[CL]{} \mathsf{BBS}x(\mathsf{KK}x)yz \\
&\xrightarrow[CL]{} \mathsf{B}(\mathsf{S}x)(\mathsf{KK}x)yz \\
&\xrightarrow[CL]{} \mathsf{S}x(\mathsf{KK}xy)z \\
&\xrightarrow[CL]{} xz(\mathsf{KK}xyz)
\end{aligned}$$

Questions

Question 1: Quel combinateur satisfait $\mathsf{F}xy \xrightarrow[CL]{} \!\!\!\!\!\rightarrow y$?

Question 2: Que vaut

$$\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})?$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})xyz &\xrightarrow[CL]{} \mathsf{BBS}x(\mathsf{KK}x)yz \\
&\xrightarrow[CL]{} \mathsf{B}(\mathsf{S}x)(\mathsf{KK}x)yz \\
&\xrightarrow[CL]{} \mathsf{S}x(\mathsf{KK}xy)z \\
&\xrightarrow[CL]{} xz(\mathsf{KK}xyz) \\
&\xrightarrow[CL]{} xz(\mathsf{K}yz)
\end{aligned}$$

Questions

Question 1: Quel combinateur satisfait $\mathsf{F}xy \underset{CL}{\twoheadrightarrow} y$?

Question 2: Que vaut

$$\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})?$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK})xyz &\underset{CL}{\rightarrow} \mathsf{BBS}x(\mathsf{KK}x)yz \\
&\underset{CL}{\rightarrow} \mathsf{B}(\mathsf{S}x)(\mathsf{KK}x)yz \\
&\underset{CL}{\rightarrow} \mathsf{S}x(\mathsf{KK}xy)z \\
&\underset{CL}{\rightarrow} xz(\mathsf{KK}xyz) \\
&\underset{CL}{\rightarrow} xz(\mathsf{K}yz) \\
&\underset{CL}{\rightarrow} xzy
\end{aligned}$$

Plan

Typage 1 / 2

On a tout d'abord :

$$\begin{array}{ll} \vdash & \mathsf{S} : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \\ \vdash & \mathsf{K} : \alpha \to \beta \to \alpha. \end{array}$$

Associé à la règle

$$\frac{\vdash M : \sigma \to \tau \qquad \vdash N : \sigma}{\vdash MN : \tau}\ (App)$$

on voit qu'on a une correspondance de Curry-Howard entre la logique combinatoire et la logique minimale à la Hilbert.

Typage 2 / 2

On a de plus

$$
\begin{array}{rcl}
 & \vdash & \mathsf{I} : \alpha \to \alpha \\
 & \vdash & \mathsf{B} : (\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha) \to \gamma \to \beta, \\
x : \alpha \to \beta \to \gamma & \vdash & \mathsf{S}\, x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \\
\mathsf{S}(\mathsf{BBS})(\mathsf{KK}) & \vdash & (\alpha \to \beta \to \gamma) \to \beta \to \alpha \to \gamma
\end{array}
$$

Plan

Syntaxe et réductions

Types

Correspondance avec le lambda-calcul

On peut donner une interprétation $[\![\_]\!]_\lambda$ des CL-termes vers les lambda-termes.

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\mathsf{K}]\!]_\lambda & = & \lambda xy.x \\
[\![\mathsf{S}]\!]_\lambda & = & \lambda xyz.x\ z\ (y\ z) \\
[\![M_1\ M_2]\!]_\lambda & = & [\![M_1]\!]_\lambda\ [\![M_2]\!]_\lambda \\
[\![x]\!]_\lambda & = & x
\end{array}
$$

Des CL-termes vers les λ-termes 2 / 3

Cette interprétation préserve les types.
Autrement dit

> si M est un terme de preuve de σ dans la logique propositionnelle minimale à la Hilbert,
>
> alors $[\![M]\!]_\lambda$ est un terme de preuve de σ dans la déduction naturelle pour la logique minimale.

Des CL-termes vers les λ-termes 3 / 3

Au niveau des preuves, cette traduction consiste à transformer une preuve à la Hilbert en une preuve en déduction naturelle en remplaçant les utilisations des axiomes *Hilbert_S* et *Hilbert_K* par leur preuve en déduction naturelle.

On n'obtient pas une preuve minimum !

Abstractions dans les CL-termes 1 / 3

On définit une opération d'abstraction $[x].M$ sur les CL-termes de la façon suivante.

Si $x \notin FV(M)$ alors

$$[x].M \quad = \quad \mathsf{K}M$$

sinon

$$\begin{aligned} [x].(M_1\ M_2) \quad &= \quad \mathsf{S}\ ([x].M_1)\ ([x].M_2) \\ [x].x \quad &= \quad \mathsf{I} \end{aligned}$$

Abstractions dans les CL-termes 2 / 3

Exemple

$$
\begin{array}{rcl}
[x].\mathsf{K} & = & \mathsf{K}\ \mathsf{K} \\
[x].\mathsf{S}\ x & = & \mathsf{S}\ ([x].\mathsf{S})\ ([x].x) \\
 & = & \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{S})\ \mathsf{I} \\
[x].[y].x & = & [x].\mathsf{K}x \\
 & = & \mathsf{S}\ ([x].\mathsf{K})\ ([x].x) \\
 & = & \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}
\end{array}
$$

Abstractions dans les CL-termes 3 / 3

$$\begin{aligned}
[x].[y].\mathsf{K}\,x\,y &= [x].\mathsf{S}\,([y].(\mathsf{K}\,x))\,([y].y) \\
&= [x].\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,(\mathsf{K}\,x))\,\mathsf{I} \\
&= \mathsf{S}\,([x].\mathsf{S})\,([x].(\mathsf{K}\,(\mathsf{K}\,x))\,\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})\,(\mathsf{S}\,([x].(\mathsf{K}\,(\mathsf{K}\,x)))\,([x].\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{S}([x].\mathsf{K})\,([x].(\mathsf{K}\,x))\,(\mathsf{K}\,\mathsf{I}) \\
&= \mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{S})\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{S}(\mathsf{K}\mathsf{K})\,(\mathsf{S}\,(\mathsf{K}\,\mathsf{K})\,\mathsf{I}))\,(\mathsf{K}\,\mathsf{I})
\end{aligned}$$

Typage des abstractions

Proposition

Si $x : \sigma, \Gamma \vdash M : \tau$ *alors* $\Gamma \vdash [x].M : \sigma \to \tau$.

Démonstration.

Par induction sur la structure de M.

$\square$

Typage des abstractions

Proposition

Si $x : \sigma, \Gamma \vdash M : \tau$ *alors* $\Gamma \vdash [x].M : \sigma \to \tau$.

Démonstration.

Par induction sur la structure de M.

- si $x \notin FV(M)$ alors $\Gamma \vdash KM : \sigma \to \tau$ pour n'importe quel σ.

$\square$

Typage des abstractions

Proposition

Si $x : \sigma, \Gamma \vdash M : \tau$ *alors* $\Gamma \vdash [x].M : \sigma \to \tau$*.*

Démonstration.

Par induction sur la structure de M.

- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv M_1\ M_2$ alors par induction $x : \sigma, \Gamma \vdash M_1 : \rho \to \tau$ et $x : \sigma, \Gamma \vdash M_2 : \rho$ et $\Gamma \vdash [x].M_1 : \sigma \to \rho \to \tau$ et $\Gamma \vdash [x].M_2 : \sigma \to \rho$. On prend $\mathsf{S} : (\sigma \to \rho \to \tau) \to (\sigma \to \rho) \to \sigma \to \tau$. Par conséquent $\Gamma \vdash \mathsf{S}\ [x].M_1\ [x].M_2 : \sigma \to \tau$. C.Q.F.D.
- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv x$ alors $\Gamma \vdash \mathsf{I} : \sigma \to \sigma$. □

Réduction

Proposition

$([x].M)\ N \xrightarrow[CL]{} \!\!\!\!\!\!\rightarrow M[x := N]$

Démonstration.

Par induction sur la définition de $[x].M$.

- si $x \notin FV(M)$ alors

$$\begin{array}{rcl} ([x].M)\ N & \equiv & \mathsf{K}\ M\ N \\ & \xrightarrow[CL]{} & M[x := N]. \end{array}$$

- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv x$ alors $[x].M \equiv I$

  et $([x].M)\ N \xrightarrow[CL]{} N = x[x := N]$.

Réduction

Proposition

$([x].M)\ N \xrightarrow[CL]{} \!\!\!\!\!\!\rightarrow M[x := N]$

Démonstration.

Par induction sur la définition de $[x].M$.

- si $x \in FV(M)$ et $M \equiv M_1\ M_2$ alors par induction

$$
\begin{array}{rcl}
([x].M_1\ M_2)\ N & = & \mathsf{S}\ ([x].M_1)\ ([x].M_2)\ N \\
 & \xrightarrow[CL]{} & (([x].M_1)\ N)\ (([x].M_2)\ N) \\
 & \xrightarrow[CL]{}\!\!\!\!\rightarrow & (M_1[x := N])\ (M_2[x := N]) \\
 & = & (M_1\ M_2)[x := N].
\end{array}
$$

$\square$

Des λ-termes vers les CL-termes 1 / 3

On peut donner une interprétation $[\![\_]\!]_{CL}$ des lambda-termes vers les CL-termes.

$$\begin{array}{rcl} [\![\lambda x.M]\!]_{CL} & = & [x].[\![M]\!]_{CL} \\ [\![M_1\ M_2]\!]_{CL} & = & [\![M_1]\!]_{CL}\ [\![M_2]\!]_{CL} \\ [\![x]\!]_{CL} & = & x \end{array}$$

On a $M \xrightarrow[\beta]{} N$ implique $[\![M]\!]_{CL} \xrightarrow[CL]{} \!\!\!\!\rightarrow [\![N]\!]_{CL}$.

Des λ-termes vers les CL-termes 2 / 3

Cette interprétation préserve les types.
Autrement dit

> si M est un terme de preuve de σ dans la déduction naturelle de la logique propositionnelle minimale
>
> alors $[\![M]\!]_{CL}$ est un terme de preuve de σ dans la logique propositionnelle minimale à la Hilbert.

Des λ-termes vers les CL-termes 3 / 3

La taille de $[\![M]\!]_{CL}$ est en $O(3^n)$ où n est la taille de M.
Clairement, $[\![[\![M]\!]_\lambda]\!]_{CL}$ n'est pas en général égal à M.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
[\![[\![K]\!]_\lambda]\!]_{CL} &= [\![\lambda x \lambda y.x]\!]_{CL} \\
&= [x].[y].x \\
&= \mathsf{S}\ (\mathsf{K}\ \mathsf{K})\ \mathsf{I}.
\end{aligned}$$

De la déduction naturelle à la logique à la Hilbert

Corollaire : Toute preuve en déduction naturelle d'une proposition de la logique minimale peut être traduite en une preuve de la même proposition en logique à la Hilbert.

De la déduction naturelle à la logique à la Hilbert

Corollaire : Toute preuve en déduction naturelle d'une proposition de la logique minimale peut être traduite en une preuve de la même proposition en logique à la Hilbert.

Il suffit de traduire le terme associé à la preuve en déduction naturelle en un CL-terme en logique combinatoire et d'en extraire la preuve en logique à la Hilbert.

De la déduction naturelle à la logique à la Hilbert

Corollaire : Toute preuve en déduction naturelle d'une proposition de la logique minimale peut être traduite en une preuve de la même proposition en logique à la Hilbert.

Il suffit de traduire le terme associé à la preuve en déduction naturelle en un CL-terme en logique combinatoire et d'en extraire la preuve en logique à la Hilbert.

$$\begin{tikzcd}
\text{Naturelle} \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \text{Hibert} \\
\Lambda \arrow[r] & \text{CL} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$