

Licence d'Informatique fondamentale

Examen final de logique

2005-2006

Documents autorisés.

Dans le cas de questions ouvertes justifiez votre réponse. Plus la réponse sera précise et succincte, plus elle sera appréciée par le correcteur.

Exercice 1

Prouvez $\vdash (\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\psi \vee \varphi)$ en déduction naturelle intuitionniste.

Exercice 2

Soit l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ et soient les interprétations de \Rightarrow et \vee :

\Rightarrow	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

\vee	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	2
2	2	2	2

1. Montrez qu'on a $\llbracket \varphi \rrbracket_2 = 2$, pour tout théorème $\vdash \varphi$ de la logique dont les axiomes sont

K	$\vdash p \Rightarrow q \Rightarrow p$
S	$\vdash (p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow r$
Or₀	$\vdash (p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$
Or₁	$\vdash p \Rightarrow p \vee q$
Or₂	$\vdash q \Rightarrow p \vee q$
A	$\vdash (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

et la règle :

$$\frac{\vdash p \Rightarrow q \quad \vdash p}{\vdash q} \text{ MP}$$

- Trouver une interprétation pour p et q telle que $\llbracket ((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p \rrbracket_2 = 1$.
- Conclure.
- Y a-t-il une analogie avec les modèles de Kripke ?

Exercice 3

1. Pourquoi peut-on affirmer, sans calculer leurs types, que $\lambda xy.y$ et $(\lambda xy.x)(\lambda z.z)$ ont le même type.
2. Montrer que $\lambda xy.x$ et $\lambda xy.y$ ont un type commun. Dans la suite on notera **T** et **F** ces deux termes.
3. Étant donnés deux termes tels que $\Gamma \vdash M : \sigma$ et $\Gamma \vdash N : \sigma$, quel est le type de $\lambda x.xMN$? On note $[M, N]$ ce terme.
4. On suppose que $\vdash M : \sigma$ et $\vdash N : \sigma$ et que $[M, N]$ **T** et $[M, N]$ **F** sont typables. Quel est le type de $[M, N]$, **T** et **F**, pour que ce soit possible?
5. Lequel des termes $[M, N]$ **T** et $[M, N]$ **F** se réduit à M et lequel se réduit à N ?

Dans la suite on se place dans le lambda calcul non typé.

6. On considère la représentation des entiers suivante :

$$\begin{aligned} \ulcorner 0 \urcorner &\equiv \mathbf{I} \\ \ulcorner n + 1 \urcorner &\equiv [\mathbf{F}, n]. \end{aligned}$$

Quelles sont les valeurs de $\ulcorner 1 \urcorner$ et $\ulcorner 4 \urcorner$ dans cette représentation?

7. Quel est le lambda terme qui représente la fonction $S_2 : \ulcorner n \urcorner \mapsto \ulcorner n + 2 \urcorner$?
8. Quelle la fonction qui est représentée par le terme $\lambda x.x\mathbf{F}$?
9. Quel est le lambda terme **Zero** tel que **Zero** $\ulcorner 0 \urcorner \xrightarrow{\beta} \mathbf{T}$ et **Zero** $\ulcorner n + 1 \urcorner \xrightarrow{\beta} \mathbf{F}$?