Magistère d'Informatique et Modélisation

Exercices de Logique : *S5*

Le but de cet exercice est de comparer deux axiomatisations de la logique modale $S5$. Rappelons les axiomes :

A1	toutes les tautologies classiques,	**A2**	$(K(\varphi \to \psi) \wedge K\varphi) \to K\psi$,
A3	$K\varphi \to \varphi$,	**A4**	$K\varphi \to KK\varphi$,
A5	$\neg K\varphi \to K\neg K\varphi$,	**A6**	$K\bot \to \bot$,
A7	$\varphi \to K\neg K\neg\varphi$,		

et les règles

R1 le modus ponens,

R2 $\dfrac{\varphi}{K\varphi}$.

Nous posons :

- $S5 \equiv A1 + A2 + A3 + A4 + A5 + R1 + R2$,
- $S5' \equiv A1 + A2 + A4 + A6 + A7 + R1 + R2$,.

Nous allons d'abord montrer que $S5' \vdash A3$. La preuve étant assez complexe, nous allons d'abord prouver dans $S5'$deux règles dérivées de $S5'$, puis une variante de $A7$, puis une proposition intermédiaire, enfin la proposition $A3$.

1. La règle de coupure

La règle de coupure :

$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$$

est valide dans un système qui contient $A1$ et $R1$, en effet on peut la remplacer par :

$$\frac{A \to B \qquad \dfrac{B \to C \qquad (B \to C) \to (A \to B) \to A \to C}{(A \to B) \to A \to C}}{A \to C}.$$

$A \to B$ et $B \to C$ sont les hypothèses et $(B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$ est une tautologie.

2. La règle RK

C'est la règle $\dfrac{\varphi \to \psi}{K\varphi \to K\psi}$, que l'on justifie ainsi :

$$\frac{\dfrac{\varphi \to \psi}{K(\varphi \to \psi)} \qquad K(\varphi \to \psi) \to K\varphi \to K\psi}{K\varphi \to K\psi}.$$

L'axiome $K(\varphi \to \psi) \to K\varphi \to K\psi$ est une variante de $A2$ que l'on justifie sans difficulté.

3. Une variante de A7

$$
\dfrac{\neg\varphi \to K\neg K\neg\neg\varphi \quad (A7) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \to \neg\neg\varphi}{K\varphi \to K\neg\neg\varphi}\; B}{\neg K\neg\neg\varphi \to \neg K\varphi}}{K(\neg K\neg\neg\varphi \to \neg K\varphi)} \qquad K(\neg K\neg\neg\varphi \to \neg K\varphi) \to K\neg K\neg\neg\varphi \to K\neg K\varphi}{K\neg K\neg\neg\varphi \to K\neg K\varphi}}{\neg\varphi \to K\neg K\varphi}
$$

B est une tautologie que le lecteur est invité à retrouver pour justifier l'emploi de la règle $R1$.
$K(\neg K\neg\neg\varphi \to \neg K\varphi) \to K\neg K\neg\neg\varphi \to K\neg K\varphi$ est variante de A2.

4. Preuve de $K\neg K\varphi \to K\varphi \to K\bot$

Montrons que $A1, A2, A4, R1, R2 \vdash K\neg K\varphi \to K\varphi \to K\bot$.

$$
\dfrac{K\varphi \to KK\varphi \quad (A4) \qquad \dfrac{(KK\varphi \wedge K\neg K\varphi) \to K\bot \qquad A}{K\varphi \to KK\varphi \to K\neg K\varphi \to K\varphi \to K\bot}}{K\neg K\varphi \to K\varphi \to K\bot}
$$

où A est la tautologie $((KK\varphi \wedge K\neg K\varphi) \to K\bot) \to (K\varphi \to KK\varphi) \to K\neg K\varphi \to K\varphi \to K\bot$.

5. Preuve de $K\varphi \to \varphi$

$$
\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \to K\neg K\varphi \quad (A7') \qquad \dfrac{K\bot \to \bot \quad (A6) \qquad K\neg K\varphi \to K\varphi \to K\bot \quad \text{(voir 4)}}{K\neg K\varphi \to K\varphi \to \bot}}{\neg\varphi \to \neg K\varphi} \qquad (\neg\varphi \to \neg K\varphi) \to K\varphi \to \varphi \quad (A1)}{K\varphi \to \varphi}
$$

6. Et $S5' \vdash A5$?

Voici un argument rapide et sommaire pour prouver $S5' \vdash A5$. On applique la complétude de $S5'$, encore faudrait-il la montrer. En effet, nous savons que $S5'$ impose aux relations d'accessibilité des modèles à être des relations d'équivalence, donc $A5$ est valide dans ces modèles, donc (modulo la complétude de $S5'$!) prouvable dans $S5'$.