Magistère d'Informatique et Modélisation

Examen de Logique

Exercice 1

1. Quelles sont le deux sortes de règles que l'on rencontre en déduction naturelle ?
2. Supposons que la syntaxe des propositions contienne outre les connecteurs $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ et $\perp$, un connecteur unaire de négation notée $\neg$ et les règles :

$$\frac{\varphi, \Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \perp}$$

   A quelle sorte appartient chacune des règles ?
3. Comment énonceriez vous la réduction à l'absurde dans ce cadre, c-à-d en utilisant le connecteur $\neg$?
4. En utilisant ces règles, prouvez :
   - $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$,
   - $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$.

Exercice 2

1. Montrez que si M est un modèle de Kripke et si $\mathrm{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ alors $\mathrm{M} \models K_i\varphi \rightarrow K_i\psi$.
2. Avez-vous utilisé une propriété spécifique de la relation d'accessibilité ? Si oui laquelle ?
3. Déduisez-en le système de logique modale où l'on peut prouver le règle

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{K\varphi \rightarrow K\psi}.$$

Corrigé de l'exercice 1

1. Les règles d'introduction et les règles d'élimination.
2. La règle $\dfrac{\varphi, \Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\varphi}$ est une règle d'introduction et la règle $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \neg\varphi}{\Gamma \vdash \perp}$ est une règle d'élimination.
3. Le règle de réduction à l'absurde s'énonce : $\dfrac{\neg\varphi, \Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \varphi}$.
4. On laisse au lecteur le soin d'établir la règle utilisée à chaque inférence.

(a) $$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\varphi, \varphi \vdash \varphi \qquad \neg\varphi, \varphi \vdash \neg\varphi}{\neg\varphi, \varphi \vdash \perp}}{\varphi \vdash \neg\neg\varphi}}{\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi}$$

(b) $$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi \qquad \neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi}{\neg\neg\varphi, \neg\varphi \vdash \perp}}{\neg\neg\varphi \vdash \varphi}}{\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi}$$