# Magistère d'Informatique et Modélisation

Exercices de Logique : *logique minimale*

Les exercices qui suivent traitent de la logique propositionnelle minimale, c-à-d celle qui n'a comme seul connecteur que le connecteur d'implication $\rightarrow$.

## Exercice 1 : Système hilbertien

Le système hilbertien est le système dans lesquels il y a le *modus ponens* et deux axiomes :

$$\begin{array}{ll} \vdash_{HM} (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \rightarrow \chi & (S) \\ \vdash_{HM} \varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi & (K) \end{array}$$

Démontrez les propositions suivantes.

1. $\vdash_{HM} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi$,
2. $\vdash_{HM} \varphi \rightarrow \varphi$,
3. $\vdash_{HM} \psi \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi$,
4. $\vdash_{HM} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow \chi \rightarrow \psi$.

## Exercice 2 : Déduction naturelle

On se place dans le système de déduction naturelle de la logique propositionnelle minimale.

1. Prouvez $(S)$ et $(K)$.
2. Prouvez les propositions 1 à 4 de l'exercice précédent.
3. Si $\vdash_{NM} \varphi$ sont les théorèmes de la déduction naturelle, montrez que $\vdash_{HM} \varphi$ implique $\vdash_{NM} \varphi$.
4. Comparez la taille des preuves obtenues dans la question 2 pour les propositions 1 à 4 de l'exercice précédent et celle obtenues en traduisant en déduction naturelle les preuves (en système hilbertien) de l'exercice précédent.

## Exercice 3 : L'axiome de Pierce

1. Montrez que l'axiome de Pierce $\pi =^{def} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi$ est une tautologie de la logique classique, autrement dit si $v$ est la valuation habituelle des propositions dans $\{0, 1\}$, alors $v(\pi) = 1$.
2. À votre avis, $\pi$ est-il un théorème de la logique propositionnelle minimale ?